

多端子通信路に対する容量域 計算アルゴリズムについて

大濱靖匡

電気通信大学 情報理工学研究科
情報・通信ネットワーク工学専攻

はじめに

- 単一通信路に対する通信路容量の反復計算アルゴリズム:
Arimoto(IT, 1972, Jan.)[1], Blahut(IT, 1972, July)[2]
 - 多端子通信路の容量域を求める問題:
Carvoら(ISIT, 2008)[3], (Com, 2010)[12] による指摘
 - 一般には非凸最適化問題
 - 最適解への収束を保証するアルゴリズムは知られていない.
- ⇒ **多端子情報理論における基本的未解決問題**
- 安井ら(信学論, 2008)[4]の研究:
 - Arimoto-Blahut (AB)アルゴリズムにより最適解が得られるクラスを提示
 - 上記以後, 最適解が得られるクラスは拡大していない?

研究(あがき)の動機

- 多端子通信路の容量域を求める問題:
 - 例題の計算は領域が解析的に求まる場合に限定されている。



動機

領域が解析的に求められない場合に
その具体形を描きたい。



本研究(あがき)

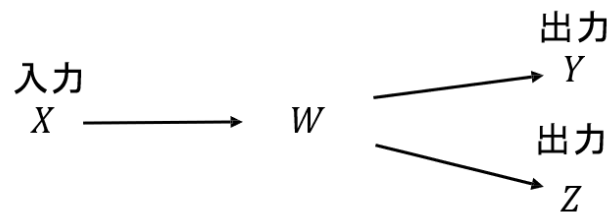
- 劣化型放送通信路(DBC)と多重アクセス通信路(MAC)に注目:
 - Arimoto-Blahut (AB)アルゴリズムでどこまで出来るか？

DBCの容量域計算

- 劣化型放送通信路(Degraded broadcast channels(DBC))の容量域計算:
Yasui and Matsushima (ISIT, 2010) [6]
 - 非凸最適化問題に対するArimoto-Blahut型領域計算アルゴリズム
 - 最適解への収束の条件
 - 上記問題に対する緩和項を用いた容量域計算アルゴリズム:
新井, 大濱 (SITA, 2014)
 - 最適解への収束の議論が不十分
- 八田, 大濱[8] (IT研, 2020)による上記アルゴリズムの解析:
 - 最適分布への収束性を数値実験により解析
 - 最適分布へ収束するための十分条件
 - Yasui and Matsushima の得た結果との比較

劣化型放送通信路 (DBC)

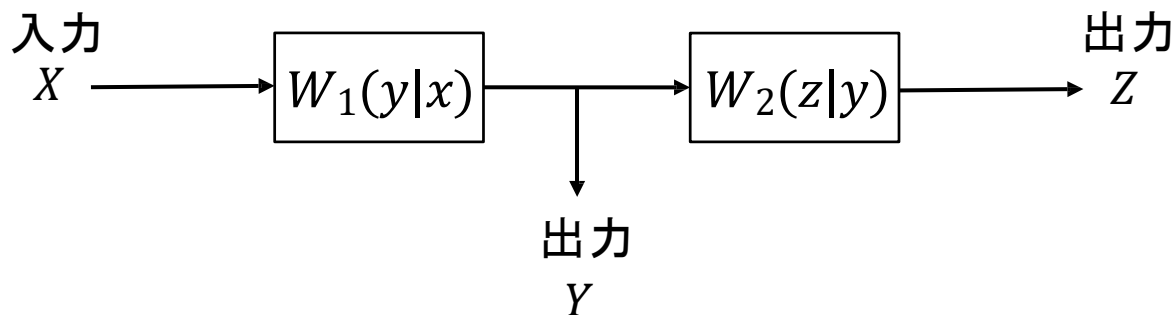
- 有限集合 $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$
- 確率変数: 入力 $X \in \mathcal{X}$ 、出力 $Y \in \mathcal{Y}$ 、 $Z \in \mathcal{Z}$
- $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ の各要素をそれぞれ x, y, z



特に確率遷移行列 $W(y, z|x)$ が以下の条件

$$W(y, z|x) = \{W_1(y|x)W_2(z|y)\}_{(x,y,z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}$$

を満たす放送通信路を、劣化型放送通信路 (DBC) とよぶ。



DBCの容量域

DBCの容量域を $\mathcal{C}_{\text{DBC}}(W_1, W_2)$ と表す.

有限集合 \mathbf{u} に値をとる確率変数 U を導入.

(U, X, Y, Z) の同時分布とその集合:

$$\mathcal{P}(W_1, W_2) = \left\{ \begin{array}{l} p = p_{UXYZ}(u, x, y, z) = \{p_{UXYZ}(u, x, y, z)\}_{(u, x, y, z) \in \mathbf{u} \times \mathbf{x} \times \mathbf{y} \times \mathbf{z}} \\ p = p_{UXYZ}: p(u, x, y, z) = p(u, x)W_1(y|x)W_2(z|y), \\ |\mathbf{u}| \leq \min\{|\mathbf{x}|, |\mathbf{y}|, |\mathbf{z}|\} \end{array} \right\}$$

条件付き相互情報量 $I_p(X; Y|U)$, 相互情報量 $I_p(Z; U)$:

$$I_p(X; Y|U) = \sum_{u, x, y} p_{UXY}(u, x, y) \log \frac{W_1(y|x)}{p_{Y|U}(y|u)}$$

$$I_p(Z; U) = \sum_{u, z} p_{UZ}(u, z) \log \frac{p_{Z|U}(z|u)}{p_Z(z)}$$

容量域の支持直線表現(1/4)

R_1 : Y を受信信号とする受信者へのメッセージの伝送レート

R_2 : Z を受信信号とする受信者へのメッセージの伝送レート

$$\text{通信路容量域: } \mathcal{C}_{\text{DBC}}(W_1, W_2) = \left\{ (R_1, R_2): R_1 \leq I_p(X; Y|U), \right. \\ \left. R_2 \leq I_p(Z; U), \exists p \in \mathcal{P}(W_1, W_2) \right\}$$

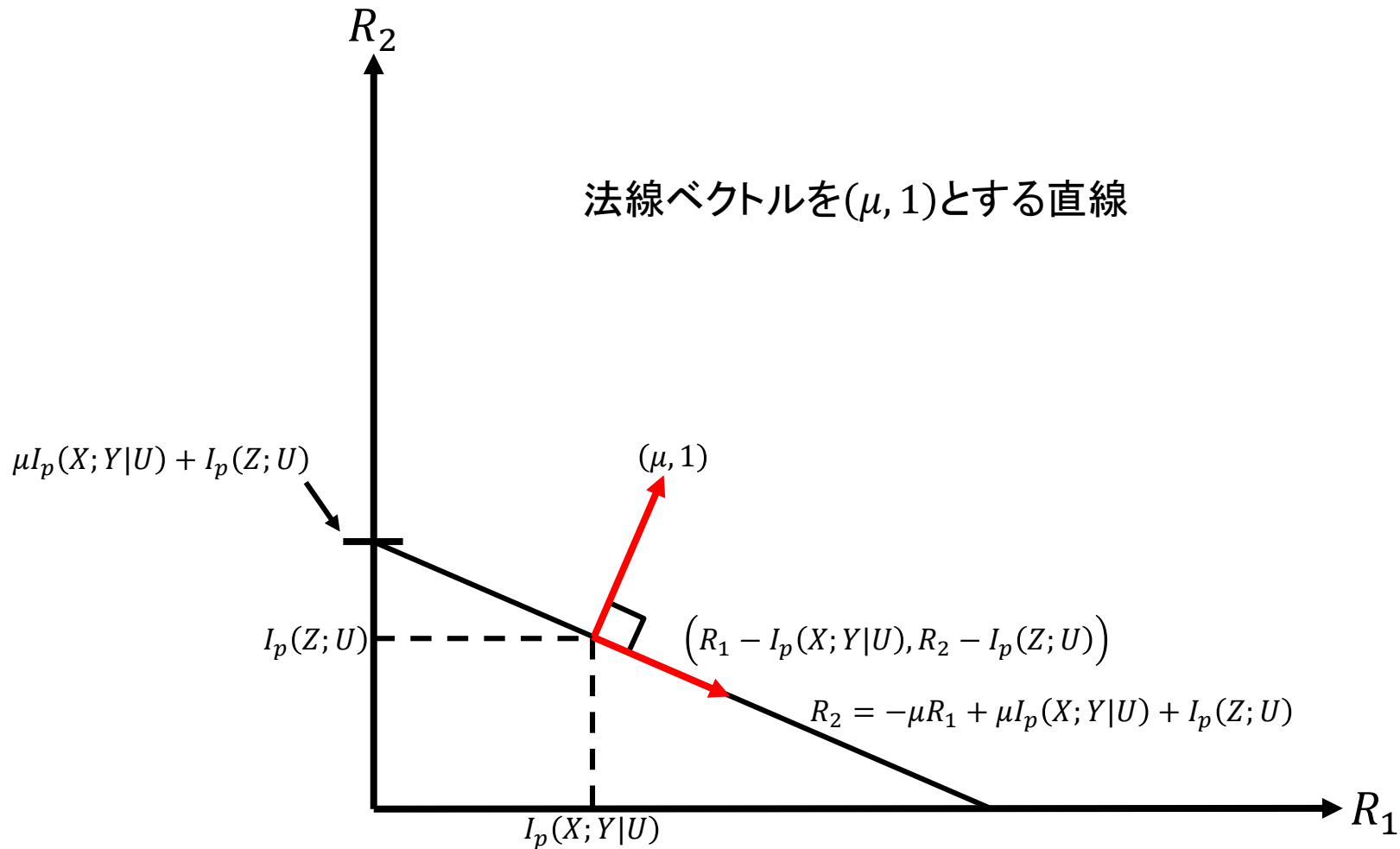
以下を定義する.

$$C^{(\mu)}(W_1, W_2) \triangleq \max_{p \in \mathcal{P}(W_1, W_2)} \{ \mu I_p(X; Y|U) + I_p(Z; U) \}$$

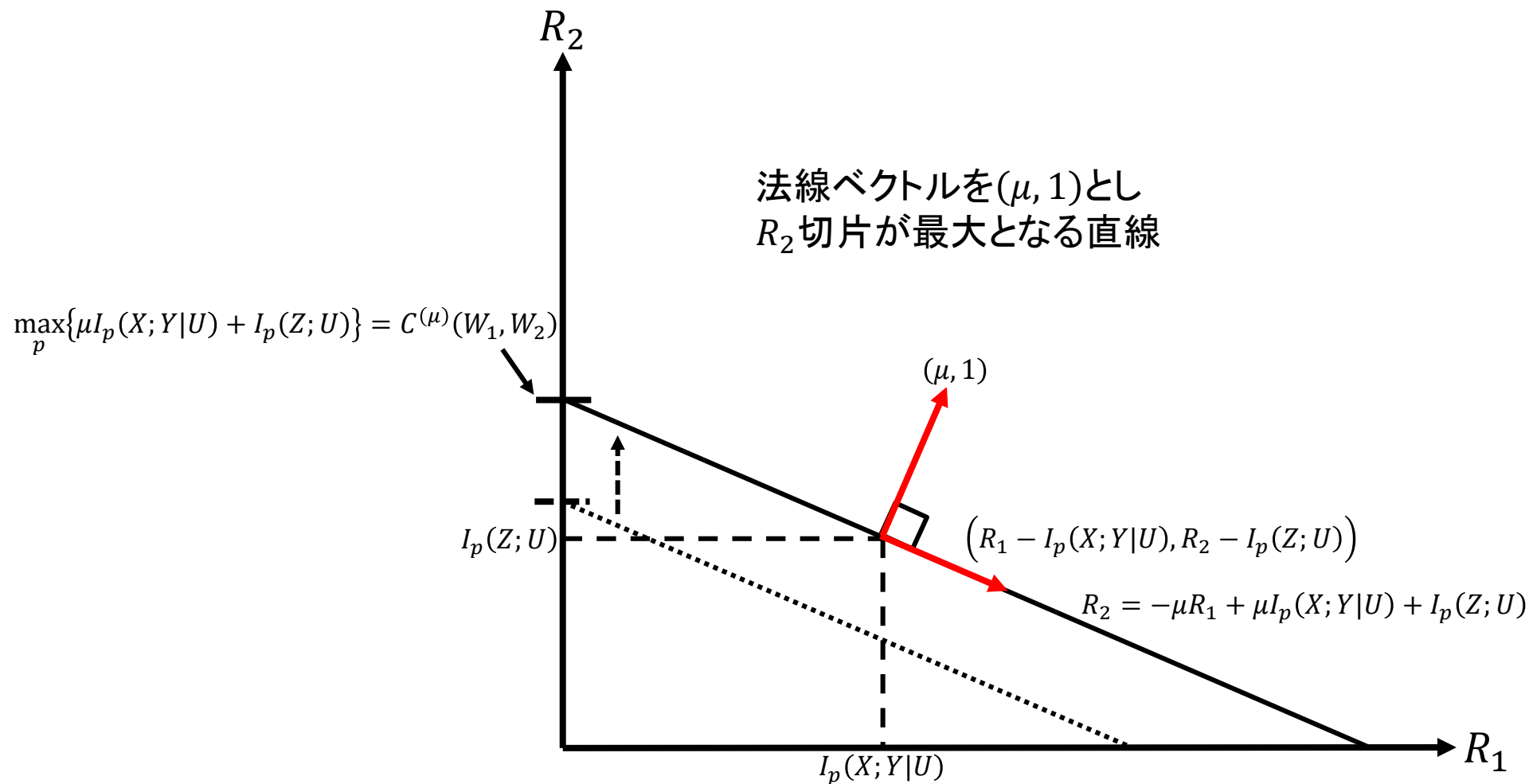
命題1

$$\mathcal{C}_{\text{DBC}}(W_1, W_2) = \bigcap_{1 \geq \mu \geq 0} \{ (R_1, R_2): \mu R_1 + R_2 \leq C^{(\mu)}(W_1, W_2) \}$$

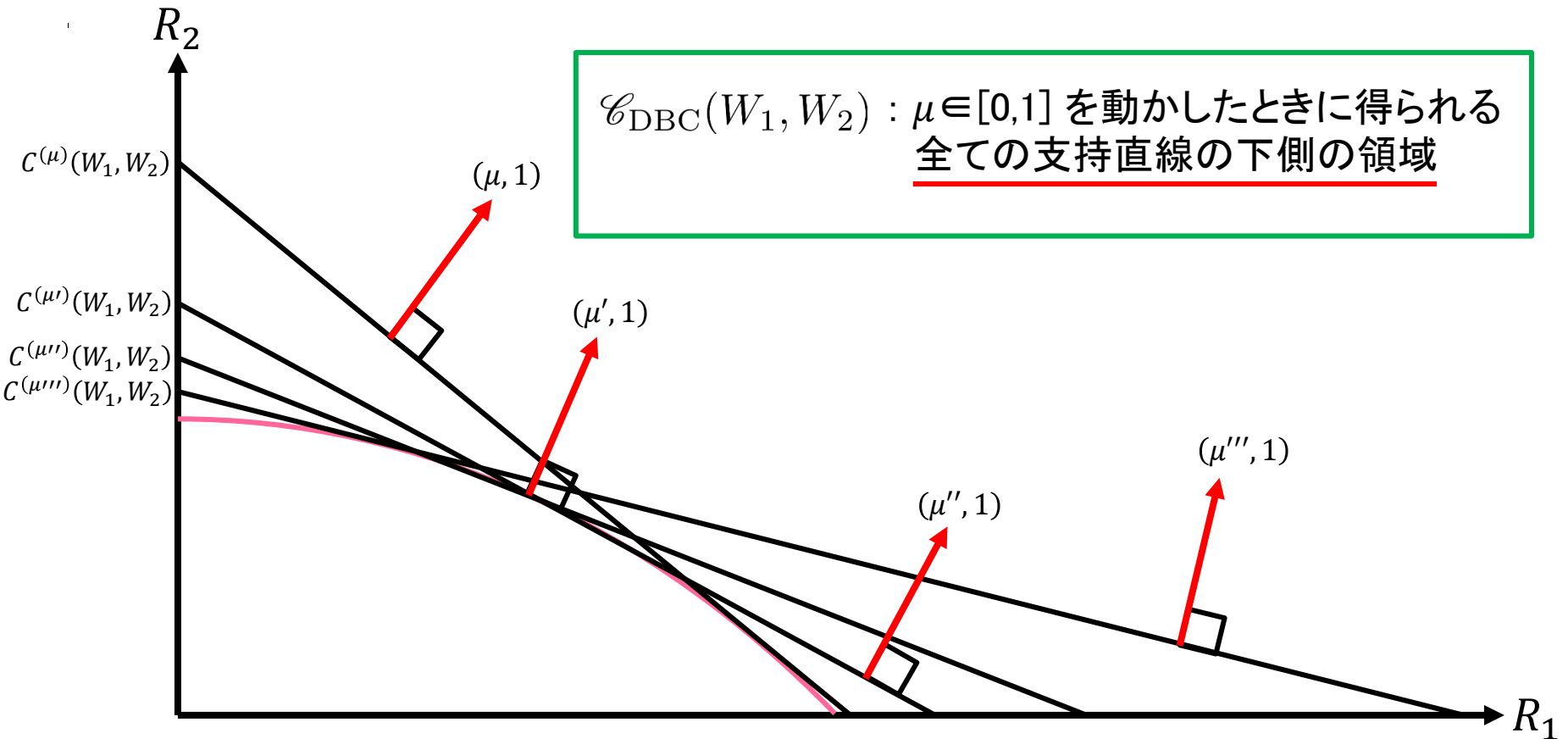
容量域の支持直線表現 (2/4)



容量域の支持直線表現 (3/4)



容量域の支持直線表現 (4/4)



容量域 $\mathcal{C}_{\text{DBC}}(W_1, W_2)$ は $C^{(\mu)}(W_1, W_2)$ により決定される。

ペナルティ項の導入

$$C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2) \triangleq \max_{(p, q)} F^{(\alpha, \mu)}(p, q)$$

$$F^{(\alpha, \mu)}(p, q) \triangleq (\mu + \alpha) \sum_{u, x, y, z} q(u, x, y, z) \left\{ \frac{\omega_p^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z)}{\mu + \alpha} \right.$$

$$\left. \omega_q^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \triangleq \mu \log \frac{W_1(y|x)}{q_{Y|U}(y|u)} + \log \frac{q_{Z|U}(z|u)}{q_Z(z)} + \alpha \log \frac{W_2(z|y)W_1(y|x)}{q_{ZY|XU}(z, y|x, u)} \right.$$

補題1

$1 - \mu \leq \alpha$ のとき

$$C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2) = \max_q \left\{ \mu I_q(X; Y|U) + I_q(Z; U) \right. \\ \left. - \alpha D(q_{ZY|XU} \| W_1, W_2 | q_{XU}) - \mu D(q_{Y|XU} \| W_1 | q_{XU}) \right\}$$

また $C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2)$ は $\alpha > 0$ に関して単調減少であり、任意の $\alpha > 0$ に対し

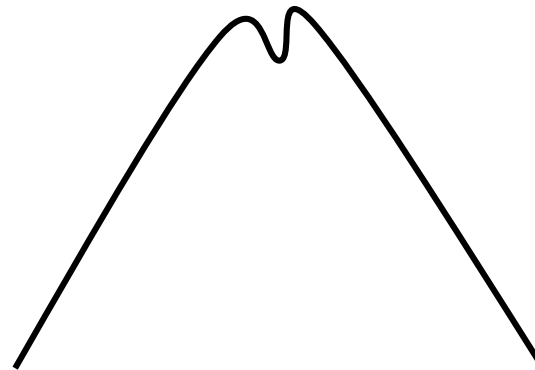
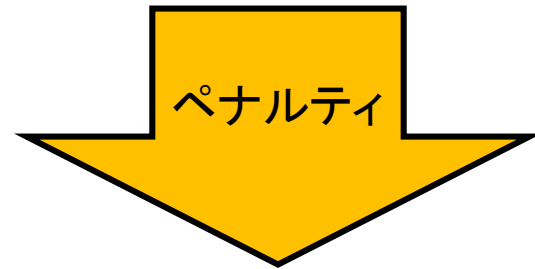
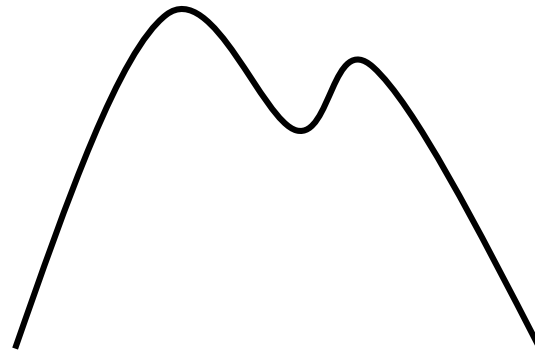
ペナルティ項

$$C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2) \geq C^{(\mu)}(W_1, W_2)$$

特に

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2) = C^{(\mu)}(W_1, W_2)$$

ペナルティによる差凸の緩和



$F^{(\alpha, \mu)}(p, q)$ に関する2つの補題

補題2

固定した q に対し, $F^{(\alpha, \mu)}(p, q)$ は, $p=q$ のとき以下の最大値をとる.

$$\begin{aligned} F^{(\alpha, \mu)}(q, q) &= \sum_{(u, x, y, z)} q(u, x, y, z) \left\{ \omega_q^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \right\} \\ &= \mu I_q(X; Y|U) + I_q(Z; U) - \alpha D(q_{ZY|XU} \| W_1, W_2 | q_{XU}) - \mu D(q_{Y|XU} \| W_1 | q_{XU}) \end{aligned}$$

補題3

固定した p に対し, $F^{(\alpha, \mu)}(p, q)$ は, q が

$$\begin{aligned} q(u, x, y, z) &= \frac{1}{K} \exp \left\{ \frac{1}{\mu + \alpha} \omega_q^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \right\} p(u, x, y, z) \\ K &= \sum_{(u, x, y, z)} \exp \left\{ \frac{1}{\mu + \alpha} \omega_q^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \right\} p(u, x, y, z) \end{aligned}$$

のとき以下の最大値をとる.

$$F^{(\alpha, \mu)}(p, q) = (\mu + \alpha) \log \sum_{(u, x, y, z)} \exp \left\{ \frac{1}{\mu + \alpha} \omega_q^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \right\} p(u, x, y, z)$$

交互最大化アルゴリズム

分布更新式:
$$q^{[t+1]}(u, x, y, z) = \frac{\exp \left\{ \frac{1}{\mu + \alpha} \omega_{q^{[t]}}^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \right\}}{K_t} q^{[t]}(u, x, y, z)$$

ここで
$$K_t = \sum_{(u, x, y, z)} \exp \left\{ \frac{1}{\mu + \alpha} \omega_{q^{[t]}}^{(\alpha, \mu)}(u, x, y, z) \right\} q^{[t]}(u, x, y, z)$$

命題2

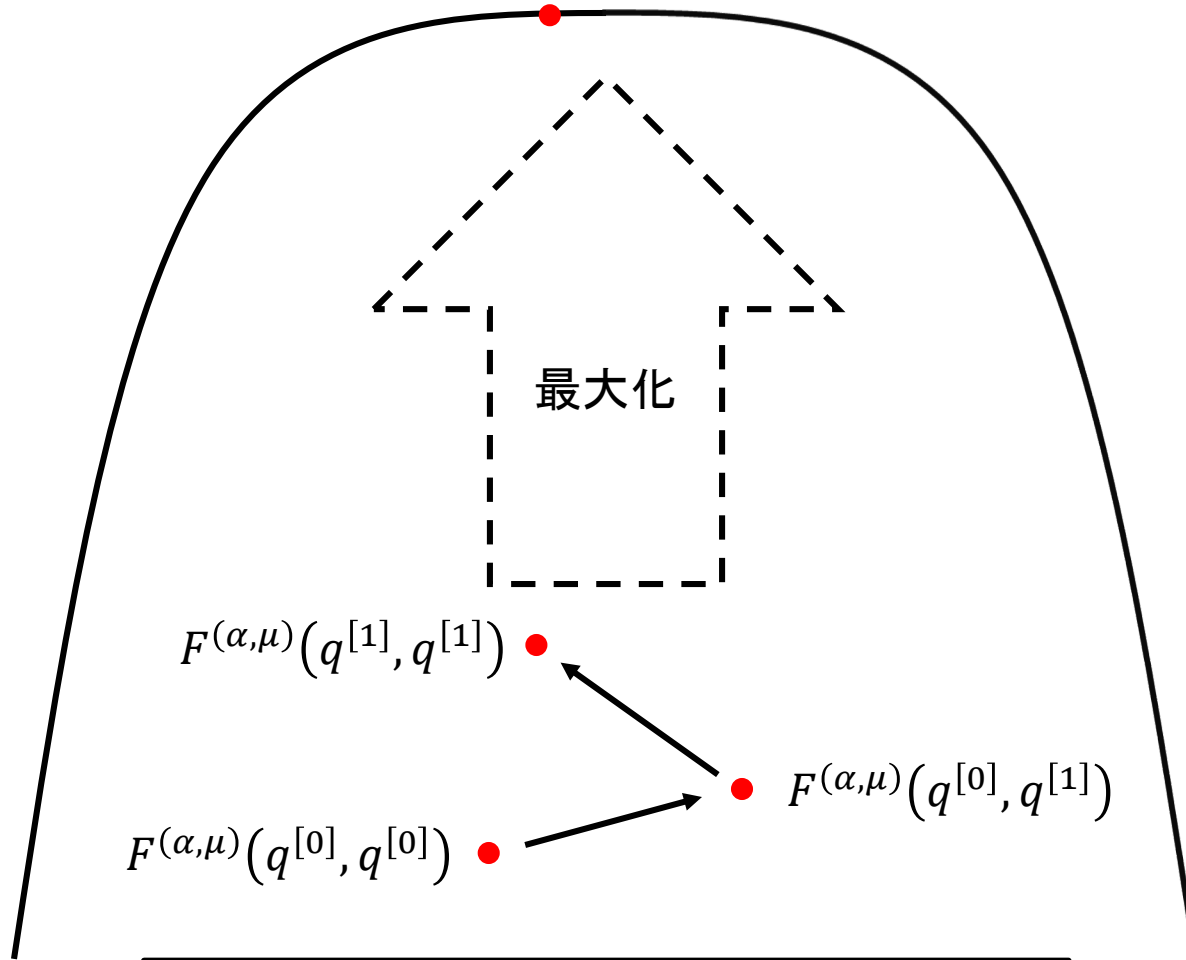
$t = 0, 1, 2, \dots$ に対し

$$\begin{aligned} F^{(\alpha, \mu)}(q^{[0]}, q^{[0]}) &\leq F^{(\alpha, \mu)}(q^{[0]}, q^{[1]}) \leq \dots \\ &\leq F^{(\alpha, \mu)}(q^{[t]}, q^{[t]}) \leq F^{(\alpha, \mu)}(q^{[t]}, q^{[t+1]}) \leq \dots \\ &\leq F^{(\alpha, \mu)}(q^*, q^*) = C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2) \end{aligned}$$

ここで q^* は $F^{(\alpha, \mu)}(p, q)$ の最適値を与える最適分布

交互最大化アルゴリズム

$$F^{(\alpha, \mu)}(q^*, q^*) = C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2)$$



分布を交互に固定・更新していくことで
目的関数を最大化

提案アルゴリズムの収束性

命題3 (新井, 大濱(SITA 2014))

非負整数 $t = 1, 2, \dots$ に対して次の等式が成り立つ。

$$C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2) - F^{(\alpha, \mu)}(q^{[t]}, q^{[t+1]}) = (\mu + \alpha) \left[D(q^* \parallel q^{[t]}) - D(q^* \parallel q^{[t+1]}) \right] \\ - \mu D(q_{Y|U}^* \parallel q_{Y|U}^{[t]} \mid q_U^*) - D(q_Z^* \parallel q_Z^{[t]}) - \alpha D(q_{ZY|XU}^* \parallel q_{ZY|XU}^{[t]} \mid q_{XU}^*) + D(q_{Z|U}^* \parallel q_{Z|U}^{[t]} \mid q_U^*)$$

命題4 (新井, 大濱(SITA 2014))

$$- \mu D(q_{Y|U}^* \parallel q_{Y|U}^{[t]} \mid q_U^*) - D(q_Z^* \parallel q_Z^{[t]}) - \alpha D(q_{ZY|XU}^* \parallel q_{ZY|XU}^{[t]} \mid q_{XU}^*) + D(q_{Z|U}^* \parallel q_{Z|U}^{[t]} \mid q_U^*) \leq 0$$

が成り立つと仮定すると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F^{(\alpha, \mu)}(q^{[t]}, q^{[t+1]}) = C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2)$$

2元対称通信路における実験

パラメータの設定

$$\alpha_k = 10^6 \times \mu_k, \quad \mu_k = \frac{1}{\rho_k}, \rho: 1 \rightarrow 10^4, \rho_{k+1} = \rho_k + 0.1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

分布更新の停止条件は、任意の (u, x, y, z) のもとで

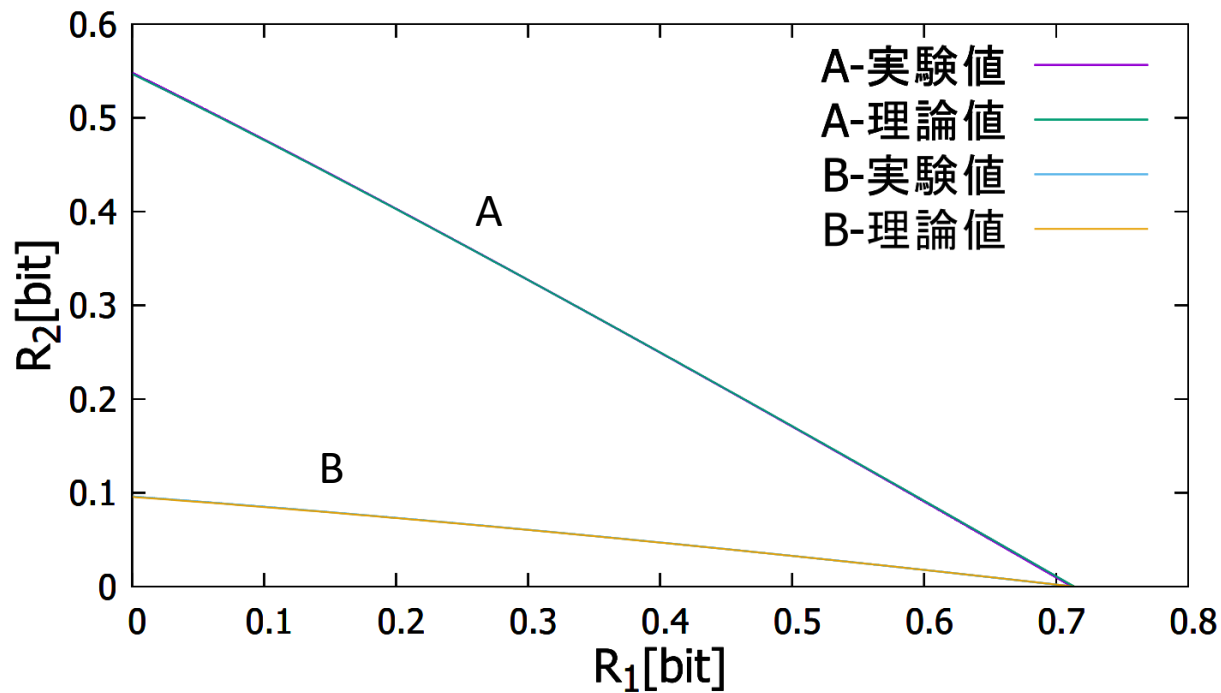
$$\left| q_{\mu_k}^{[t]}(u, x, y, z) - q_{\mu_k}^{[t-1]}(u, x, y, z) \right| \leq \epsilon, \quad \epsilon = 10^{-4}$$

を満たす最小の t (これを t^* とする)のとき停止する。

初期分布の設定

1. $k = 0$ に対し $\mathcal{U} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ 上の分布 $q_{\mu_0}^{[0]}$ を適当にとる。
2. $k = 1, 2, \dots$ に対し初期分布 $q_{\mu_k}^{[0]} = q_{\mu_{k-1}}^{[t^*]}$ と設定する。

2元における実験結果



確率遷移行列の設定

$$\begin{aligned}
 \text{A: } W_1(y|x) &= \begin{bmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{95}{100} \end{bmatrix}, & W_2(z|y) &= \begin{bmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{95}{100} \end{bmatrix} \\
 \text{B: } W_1(y|x) &= \begin{bmatrix} \frac{95}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{95}{100} \end{bmatrix}, & W_2(z|y) &= \begin{bmatrix} \frac{70}{100} & \frac{30}{100} \\ \frac{30}{100} & \frac{70}{100} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

3元対称通信路における実験

パラメータの設定

$$\alpha_k = 10^5 \times \mu_k, \quad \mu_k = \frac{1}{\rho_k}, \rho: 1 \rightarrow 10^4, \rho_{k+1} = \rho_k + 0.1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

分布更新の停止条件は、任意の (u, x, y, z) のもとで

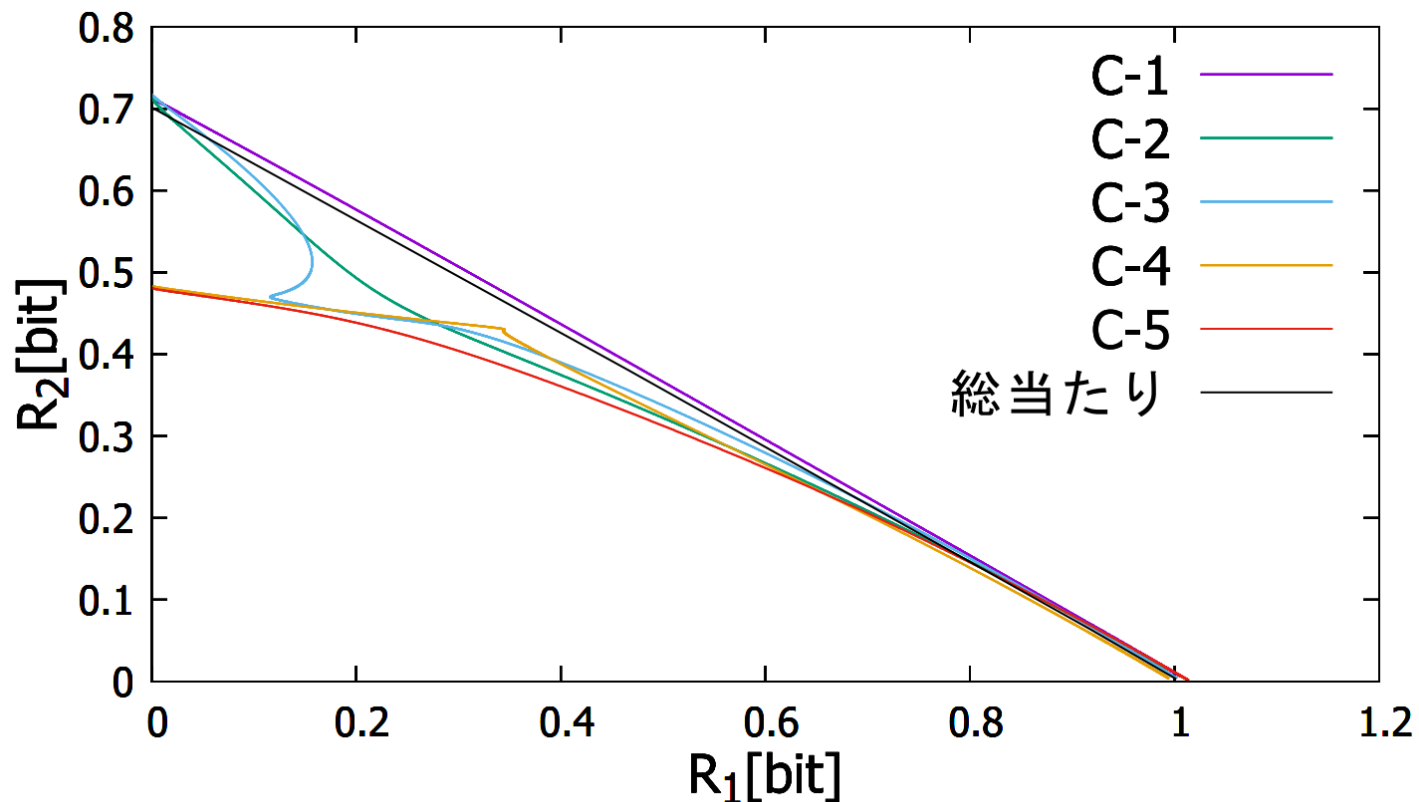
$$\left| q_{\mu_k}^{[t]}(u, x, y, z) - q_{\mu_k}^{[t-1]}(u, x, y, z) \right| \leq \epsilon, \quad \epsilon = 10^{-2}$$

を満たす最小の t (これを t^* とする)のとき停止する。

初期分布の設定

1. $k = 0$ に対し $\mathcal{U} \times \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ 上の分布 $q_{\mu_0}^{[0]}$ を適当にとる。
2. $k = 1, 2, \dots$ に対し初期分布 $q_{\mu_k}^{[0]} = q_{\mu_{k-1}}^{[t^*]}$ と設定する。

3元における実験結果



確率遷移行列の設定

$$C: W_1(y|x) = \begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{90}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{90}{100} \end{bmatrix}, \quad W_2(z|y) = \begin{bmatrix} \frac{90}{100} & \frac{5}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{90}{100} & \frac{5}{100} \\ \frac{5}{100} & \frac{5}{100} & \frac{90}{100} \end{bmatrix}$$

実験の考察

2元劣化型対称放送通信路

- A, Bどちらにおいても実験値と理論値が一致
- 最適な分布に収束していると考えられる.

3元劣化型対称放送通信路

- C-1は総当たりの結果と近い値である. →緩和問題に対する最適分布に収束した結果ではないか.
- 一方C-2~C-5は, 初期分布によってC-1とは異なる収束が得られた.

$\mu = 1$ で通信路容量を得たときの それぞれの最適分布

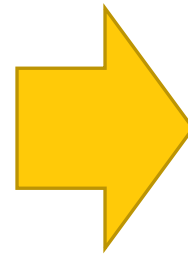
$$q_{UX}^*(u, x) \text{ of C-1} = \begin{bmatrix} 0.106 & 0.097 & 0.116 \\ 0.091 & 0.131 & 0.113 \\ 0.137 & 0.122 & 0.089 \end{bmatrix}$$

$$q_{UX}^*(u, x) \text{ of C-2} = \begin{bmatrix} 0.104 & 0.118 & 0.125 \\ 0.097 & 0.096 & 0.130 \\ 0.119 & 0.149 & 0.063 \end{bmatrix}$$

$$q_{UX}^*(u, x) \text{ of C-3} = \begin{bmatrix} 0.090 & 0.104 & 0.113 \\ 0.111 & 0.101 & 0.100 \\ 0.131 & 0.119 & 0.130 \end{bmatrix}$$

$$q_{UX}^*(u, x) \text{ of C-4} = \begin{bmatrix} 0.130 & 0.078 & 0.132 \\ 0.085 & 0.100 & 0.114 \\ 0.130 & 0.101 & 0.131 \end{bmatrix}$$

$$q_{UX}^*(u, x) \text{ of C-5} = \begin{bmatrix} 0.138 & 0.106 & 0.097 \\ 0.111 & 0.132 & 0.082 \\ 0.125 & 0.136 & 0.072 \end{bmatrix}$$

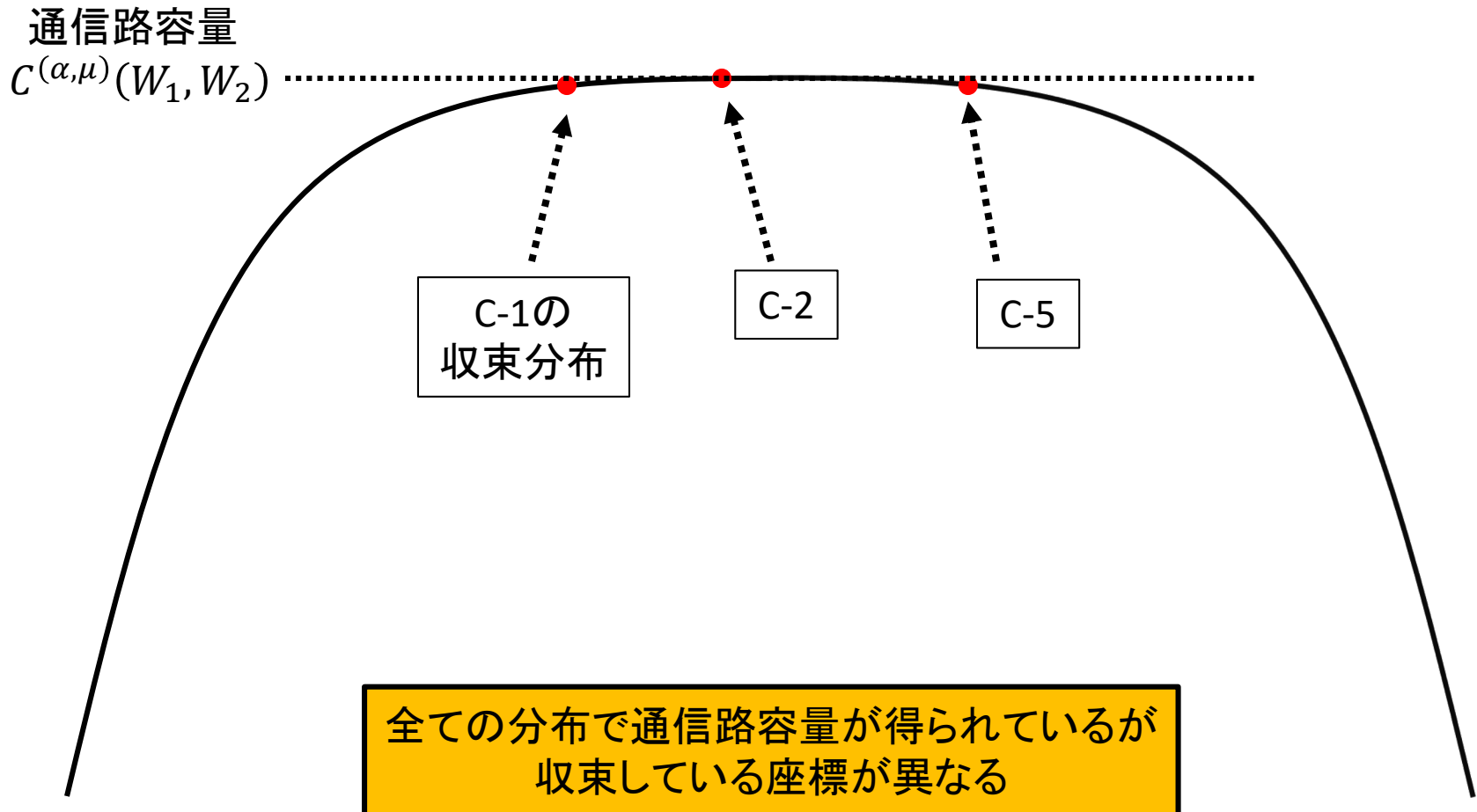


$R_1 = C(W_1), R_2 = 0$
を与える最適分布
が複数ある

$$\mu = 1$$

異なる容量域が得られる
理由の推測

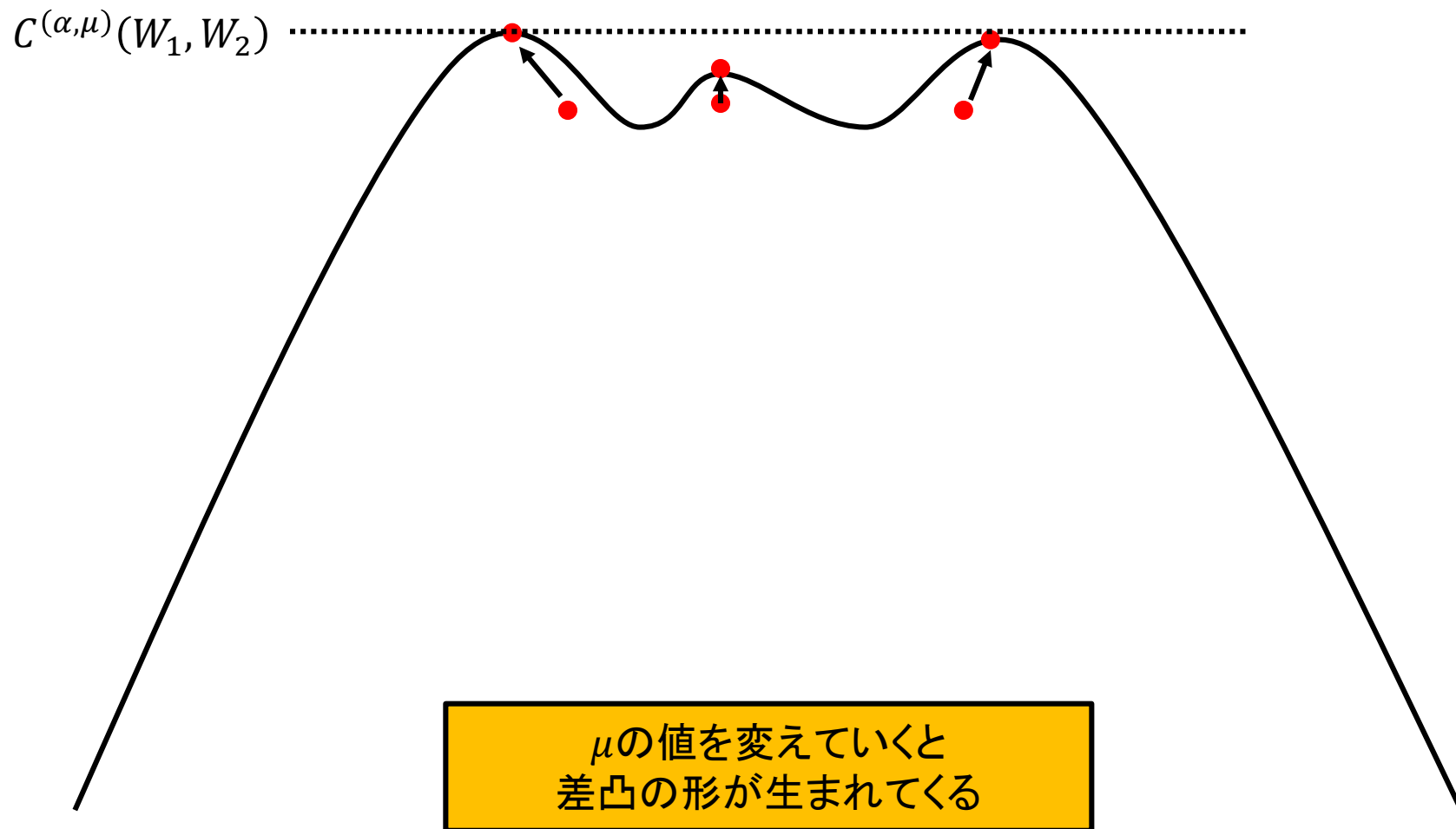
イメージ図



$$0 < \mu < 1$$

異なる容量域が得られる
理由の推測

イメージ図



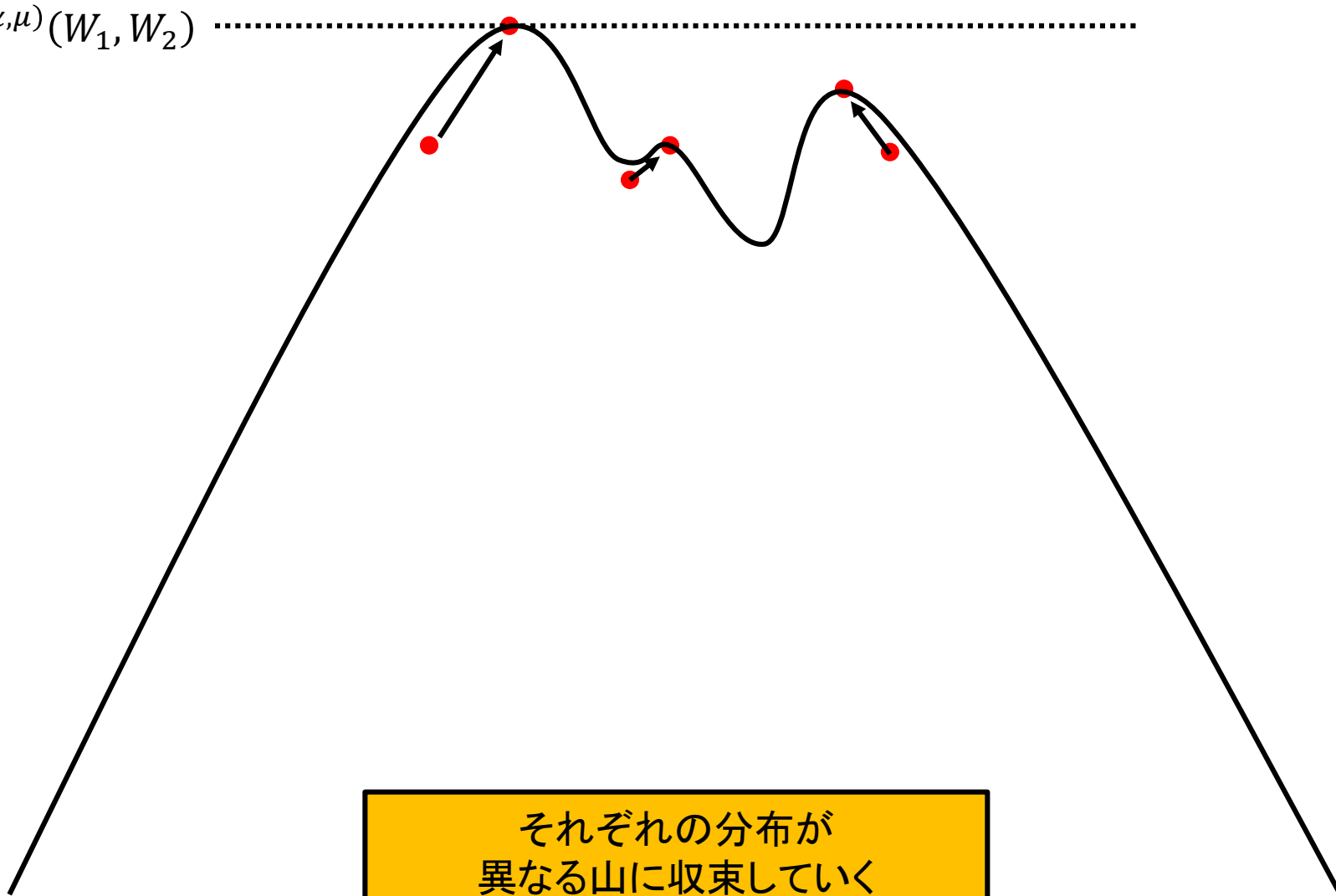
μ の値を変えていくと
差凸の形が生まれてくる

$$0 < \mu < 1$$

異なる容量域が得られる
理由の推測

イメージ図

$$C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2)$$



それぞれの分布が
異なる山に収束していく

$$\mu = 0$$

異なる容量域が得られる
理由の推測

イメージ図

$$C^{(\alpha, \mu)}(W_1, W_2)$$

C-1

C-2

C-5

収束分布の推移の仕方によって
異なる容領域が描かれる

結論

- 緩和項を用いたArimoto-Blautht 型容量域逐次計算アルゴリズム
 - 提案アルゴリズムを用いた数値実験
 - 初期分布の選び方による異なる結果とその理由
- Kumar and Thangaragi (ISIT2008)[5], Yasui and Matsuhima (ISIT2010)[6], 提案アルゴリズムの生成する分布列が最適分布へ収束するための十分条件を導出できる.
- 緩和項の導入→上記の十分条件は, Yasui and Matsushima (ISIT2010)[6]の得た十分条件よりも見かけ上緩い. 真に緩いかどうか？

MACの容量域計算について

- Yatanabe (IT, 1996)[9], 浜田ら (IT研,1998)[10], Rezaeian and Grant (IT, 2004)[11], Calvoら (Com, 2010) [12] による研究



容量域を計算するアルゴリズムは確立されていない。

- **岸本, 大濱 (SITA2021) [13]の結果**
 - a) 2入力1出力MACの容量域計算アルゴリズムの提案
ABアルゴリズム + 部分的全数探索
 - b) 具体例に対する領域の描画

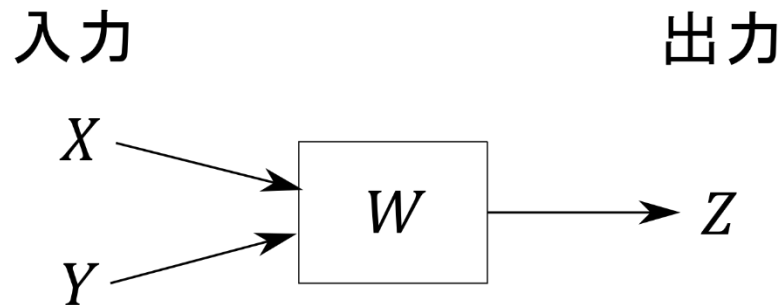
多重アクセス通信路(MAC)

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$: 有限集合

$X \in \mathcal{X}, Y \in \mathcal{Y}$: 通信路の入力を表す確率変数(独立)

$Z \in \mathcal{Z}$: 通信路からの出力を表す確率変数

$\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ の各要素をそれぞれ x, y, z とする.



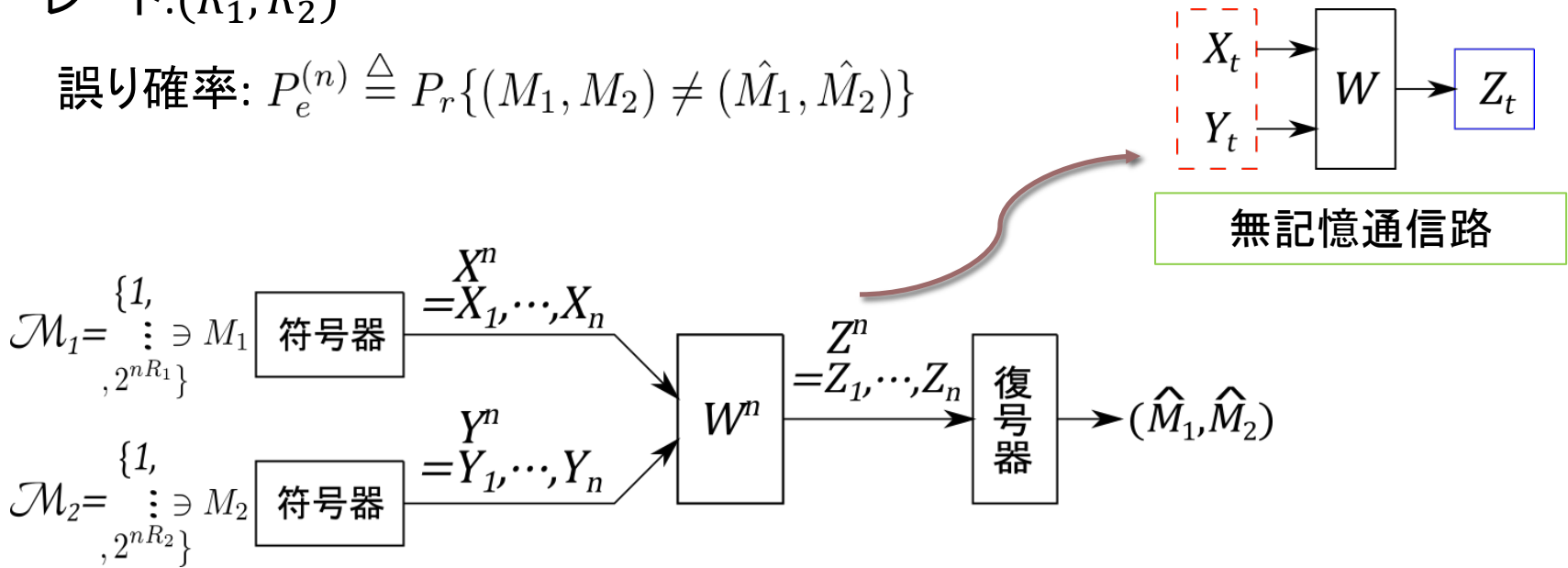
遷移確率行列は以下のように与えられる.

$$W = \{W(z|x, y)\}_{(x, y, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}}$$

MACを用いた情報伝送

レート: (R_1, R_2)

誤り確率: $P_e^{(n)} \triangleq P_r\{(M_1, M_2) \neq (\hat{M}_1, \hat{M}_2)\}$



$\mathcal{C}_{\text{MAC}}(W)$: MACの容量域

$\mathcal{C}_{\text{MAC}}(W) \triangleq \{(R_1, R_2) : \text{ある符号器1, 符号器2, 復号器に対し}$
 $P_e^{(n)} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)\}$

相互情報量とダイバージェンス

(条件付き)相互情報量は以下で表される.

$$I(p_X, W|p_Y) = \sum_{x,y,z} p_X(x)p_Y(y)W(z|x,y) \log \frac{W(z|x,y)}{\sum_a p_X(a)W(z|a,y)}$$

$$I(p_Y, W|p_X) = \sum_{x,y,z} p_X(x)p_Y(y)W(z|x,y) \log \frac{W(z|x,y)}{\sum_b p_Y(b)W(z|x,b)}$$

$$I(p_X, p_Y, W) = \sum_{x,y,z} p_X(x)p_Y(y)W(z|x,y) \log \frac{W(z|x,y)}{\sum_{a,b} p_X(a)p_Y(b)W(z|a,b)}$$

ダイバージェンスは以下で表される.

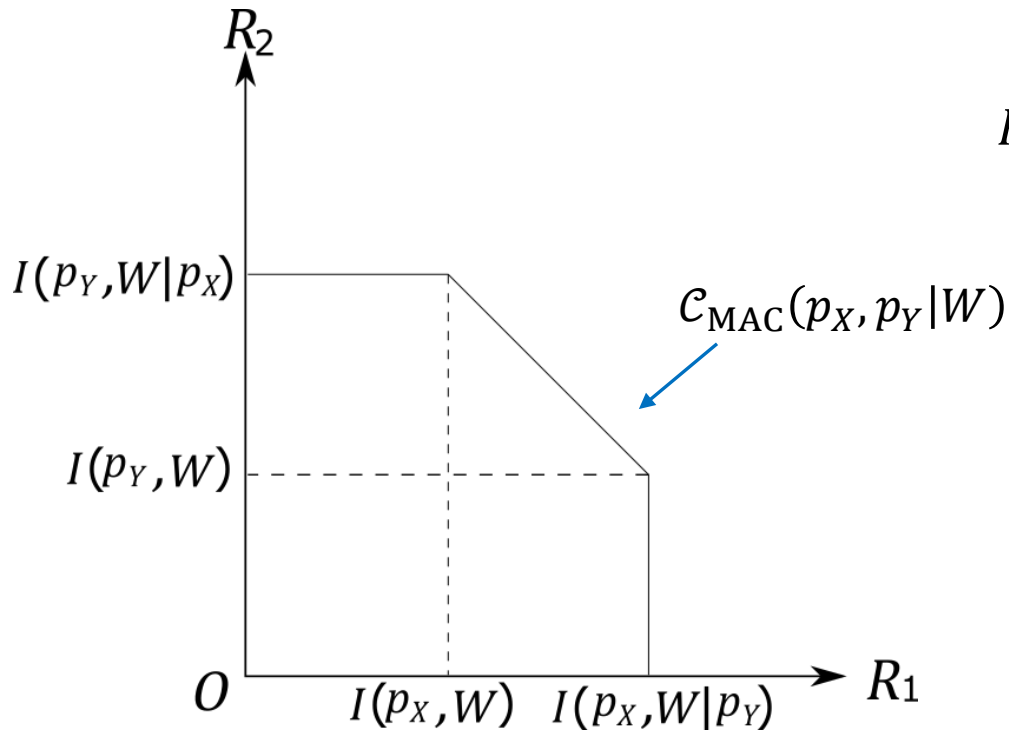
$$D(p_X || q_X) = \sum_x p_X(x) \log \frac{p_X(x)}{q_X(x)} \geq 0$$

ダイバージェンスは非負であり, 等号成立条件は $p_X = q_X$ である.

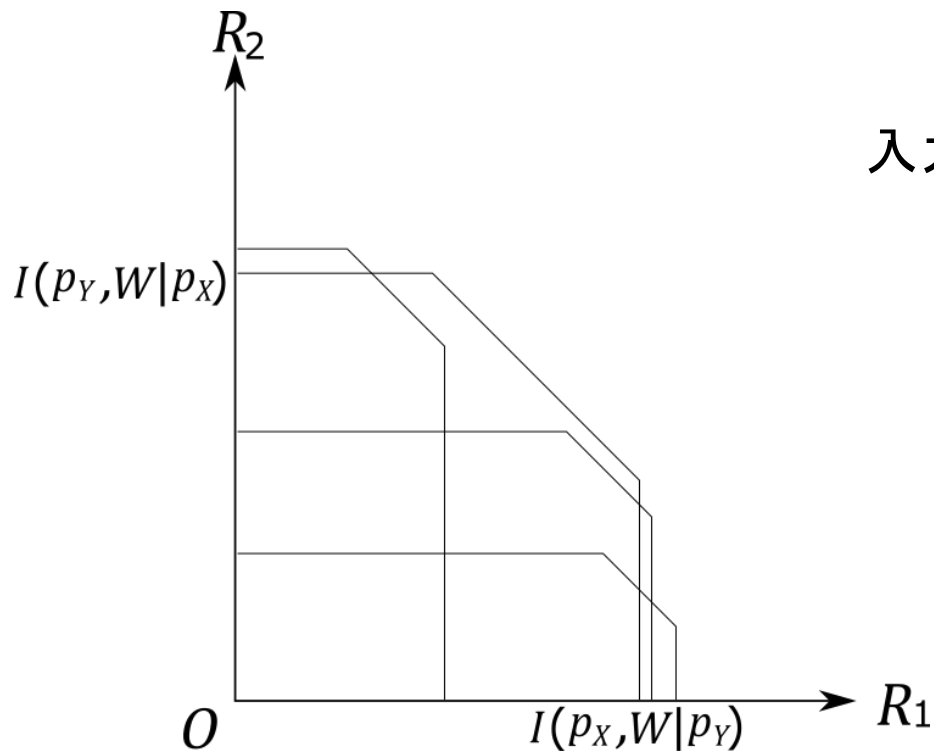
MACの通信路容量域(1/3)

固定された入力分布 (p_X, p_Y) に対するMACの容量域を $\mathcal{C}_{\text{MAC}}(p_X, p_Y|W)$ とし, 次のように定義する.

$$\mathcal{C}_{\text{MAC}}(p_X, p_Y|W) \triangleq \{(R_1, R_2): R_1 \leq I(p_X, W|p_Y), \\ R_2 \leq I(p_Y, W|p_X), \\ R_1 + R_2 \leq I(p_X, p_Y, W)\}$$



MACの通信路容量域(2/3)



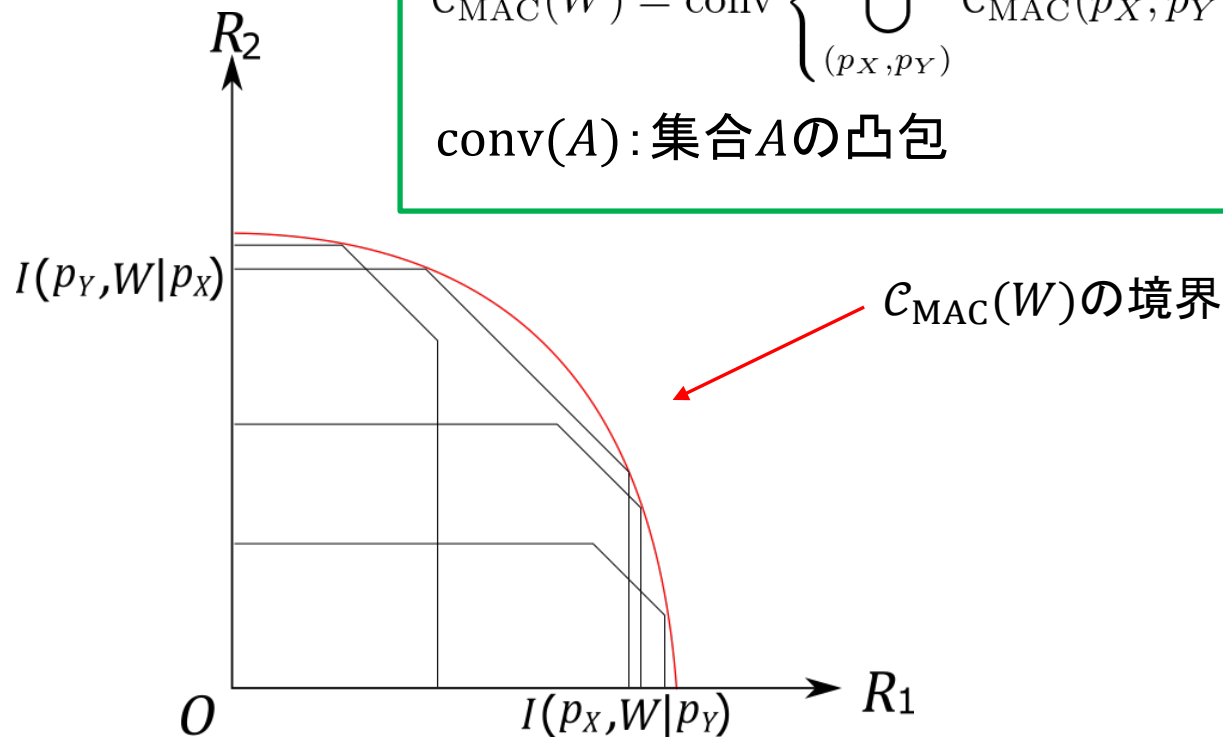
入力分布 (p_X, p_Y) を動かすと...

MACの通信路容量域(3/3)

$C_{\text{MAC}}(W)$ は以下で与えられる.

$$C_{\text{MAC}}(W) = \text{conv} \left\{ \bigcup_{(p_X, p_Y)} C_{\text{MAC}}(p_X, p_Y | W) \right\}$$

$\text{conv}(A)$: 集合 A の凸包



接平面表現による容量域計算(1/4)

$\mathcal{C}_{\text{MAC}}(p_X, p_Y|W)$ が

$$R_1 \leq I(p_X, W|p_Y), R_2 \leq I(p_Y, W|p_X), R_1 + R_2 \leq I(p_X, p_Y, W)$$

なる不等式を満たす (R_1, R_2) で与えられることに注目し、
次の3次元領域を定義する。

$$\mathcal{C}_{\text{ext}}(p_X, p_Y|W) = \{(r_1, r_2, r_3) : r_1 \leq I(p_X, W|p_Y), \\ r_2 \leq I(p_Y, W|p_X), \\ r_3 \leq I(p_X, p_Y, W)\}$$

$$\mathcal{C}_{\text{ext}}(W) \triangleq \text{conv} \left\{ \bigcup_{(p_X, p_Y)} \mathcal{C}_{\text{ext}}(p_X, p_Y|W) \right\}$$

$\mathcal{C}_{\text{ext}}(W)$ を求めれば
 $\mathcal{C}_{\text{MAC}}(W)$ が求まる

補題4

$$\mathcal{C}_{\text{MAC}}(W) = \{(R_1, R_2) : (R_1, R_2, R_1 + R_2) \in \mathcal{C}_{\text{ext}}(W)\}$$

接平面表現による容量域計算(2/4)

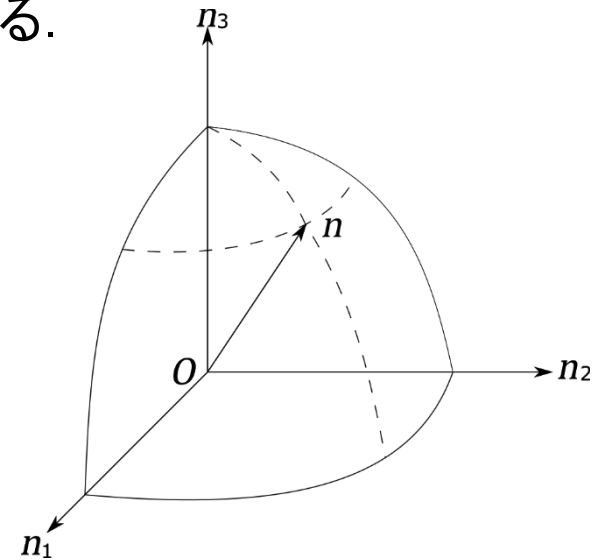
以下のような法線ベクトル $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ を考える.

$$n_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1$$

$C^{(\mathbf{n})}(W)$ を以下のように定義する.

$$C^{(\mathbf{n})}(p_X, p_Y | W) \triangleq \{n_1 I(p_X, W | p_Y) + n_2 I(p_Y, W | p_X) + n_3 I(p_X, p_Y, W)\}$$

$$C^{(\mathbf{n})}(W) \triangleq \max_{(p_X, p_Y)} C^{(\mathbf{n})}(p_X, p_Y | W)$$



すると、次の命題が成り立つ.

命題5

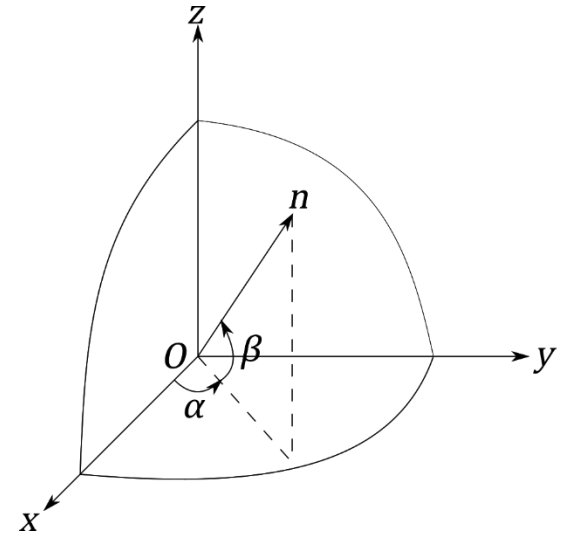
$$C_{\text{ext}}(W) = \bigcap_{\mathbf{n} \geq 0} \left\{ (r_1, r_2, r_3) : \sum_{i=1}^3 n_i r_i \leq C^{(\mathbf{n})}(W) \right\}$$

接平面表現による容量域計算(3/4)

法線ベクトルを $n = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$ と表したときの $C^{(n)}(p_X, p_Y | W)$ および $C^{(n)}(W)$ をそれぞれ

$$C^{(\alpha, \beta)}(p_X, p_Y | W) = \{I(p_X, W | p_Y)\cos\alpha\cos\beta + I(p_Y, W | p_X)\sin\alpha\cos\beta + I(p_X, p_Y, W)\sin\beta\}$$

および $C^{(\alpha, \beta)}(W)$ とおく. 命題5より次の系を得る.



系1

$$C_{\text{ext}}(W) = \bigcap_{[\alpha, \beta] \in [0, \frac{\pi}{2}]^2} \left\{ (r_1, r_2, r_3) : [r_1\cos\alpha + r_2\sin\alpha]\cos\beta + r_3\sin\beta \leq C^{(\alpha, \beta)}(W) \right\}$$

命題5と系1より次の命題が得られる.

接平面表現による容量域計算(4/4)

命題6

MACの容量域 $\mathcal{C}_{\text{MAC}}(W)$ の境界 $\partial\mathcal{C}_{\text{MAC}}(W)$ を

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} = r(\theta) \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

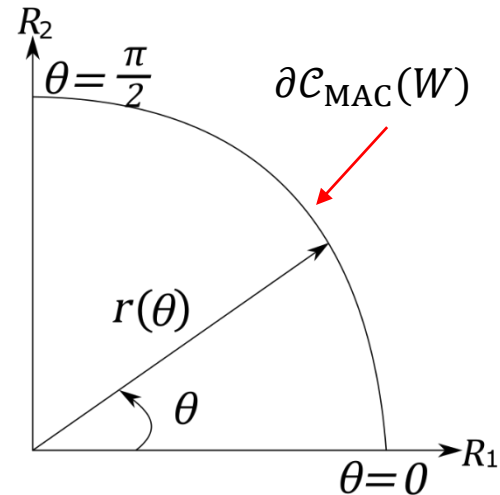
とパラメータ表示したとき

$r(\theta)$ は以下の式で与えられる.

$$r(\theta) = \min_{(\alpha, \beta) \in [0, \frac{\pi}{2}]^2} \frac{C^{(\alpha, \beta)}(W)}{\cos(\theta - \alpha)\cos\beta + (\cos\theta + \sin\theta)\sin\beta}$$

これを求めたい!

$C^{(\alpha, \beta)}(W)$



$C^{(\alpha,\beta)}(W)$ を求める手順

$$\begin{aligned} C^{(\alpha,\beta)}(W) &= \max_{p_Y} \max_{p_X} \{ \underbrace{I(p_X, W|p_Y)}_{\text{orange underline}} \cos\alpha \cos\beta \\ &\quad + \underbrace{I(p_Y, W|p_X)}_{\text{orange underline}} \sin\alpha \cos\beta + \underbrace{I(p_X, p_Y, W)}_{\text{orange underline}} \sin\beta \} \\ &= \max_{p_Y} \underbrace{C^{(\alpha,\beta)}(p_Y|W)}_{\text{orange underline}} \end{aligned}$$

1. p_Y を固定する.
2. $\underbrace{C^{(\alpha,\beta)}(p_Y|W)}_{\text{orange underline}}$ を Arimoto-Blahut アルゴリズムを用いて求める.
3. 固定していた p_Y を動かすと $C^{(\alpha,\beta)}(p_Y|W)$ もそれに対応して値をとり、その最大値から $C^{(\alpha,\beta)}(W)$ が求まる.

Arimoto-Blahut アルゴリズム(1/5)

$C^{(\alpha,\beta)}(p_Y|W)$ を求めるために以下の目的関数を定義する.

$$F^{(\alpha,\beta)}(p_X, q_X) \triangleq I(q_X, W|p_Y)\cos\alpha\cos\beta + I(p_Y, W|q_X)\sin\alpha\cos\beta + I(q_X, p_Y, W)\sin\beta \\ + \frac{D(q_Z|Y||p_Z|Y|p_Y) - D(q_X||p_X)}{\cos\alpha\cos\beta} \\ + \frac{D(q_Z||p_Z) - D(q_X||p_X)}{\sin\beta}$$

この目的関数について次の補題が成り立つ.

補題5

固定した q_X に対し, $F^{(\alpha,\beta)}(p_X, q_X)$ は $p_X = q_X$ のときに以下の最大値をとる.

$$F^{(\alpha,\beta)}(q_X, q_X) = I(q_X, W|p_Y)\cos\alpha\cos\beta + I(p_Y, W|q_X)\sin\alpha\cos\beta + I(q_X, p_Y, W)\sin\beta$$

Arimoto-Blahut アルゴリズム (2/5)

補題6

固定した p_X に対し, $F^{(\alpha, \beta)}(p_X, q_X)$ は

$$q_X(x) = \frac{1}{K} \exp \left\{ \frac{A^{(\alpha, \beta)}(x)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta} \right\} p_X(x)$$

のとき最大値 $(\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta) \log K$ をとる. ここで, $A^{(\alpha, \beta)}(x)$ および規格化定数 K はそれぞれ以下で与えられる.

$$\begin{aligned} A^{(\alpha, \beta)}(x) &= A_{(p_X, p_Y, W)}^{(\alpha, \beta)}(x) \\ &\triangleq \sum_{y, z} p_Y(y) W(z|x, y) \left\{ \cos \alpha \cos \beta \log \frac{W(z|x, y)}{\sum_a W(z|a, y) p_X(a)} \right. \\ &\quad \left. + \sin \alpha \cos \beta \log \frac{W(z|x, y)}{\sum_b W(z|x, b) p_Y(b)} + \sin \beta \log \frac{W(z|x, y)}{\sum_{a, b} W(z|a, b) p_X(a) p_Y(b)} \right\} \\ K &= \sum_a \exp \left\{ \frac{A^{(\alpha, \beta)}(a)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta} \right\} p_X(a) \end{aligned}$$

Arimoto-Blahutアルゴリズム(3/5)

補題5, 6より, 次の分布更新アルゴリズムが得られる.

分布更新アルゴリズム

1. $q_X^{[0]}$ を適当にとる.

2. $t = 0, 1, 2 \dots$ のときの分布更新式を以下に定める.

$$q_X^{[t+1]}(x) = \frac{1}{K_t} \exp \left\{ \frac{A^{(\alpha, \beta)}(x)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta} \right\} q_X^{[t]}(x)$$

ここで, K_t は以下の式で与えられる.

$$K_t = \sum_a \exp \left\{ \frac{A^{(\alpha, \beta)}(a)}{\cos \alpha \cos \beta + \sin \beta} \right\} q_X^{[t]}(a)$$

Arimoto-Blahut アルゴリズム (4/5)

分布更新アルゴリズムについて、次の命題が成り立つ。

命題7

$t = 0, 1, 2, \dots$ のとき、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[0]}, q_X^{[0]}) &\stackrel{(a)}{\leq} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[0]}, q_X^{[1]}) \stackrel{(b)}{\leq} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[1]}, q_X^{[1]}) \\ &\stackrel{(a)}{\leq} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[t-1]}, q_X^{[t]}) \stackrel{(b)}{\leq} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[t]}, q_X^{[t]}) \\ &\stackrel{(a)}{\leq} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[t]}, q_X^{[t+1]}) \stackrel{(b)}{\leq} F^{(\alpha, \beta)}(q_X^{[t+1]}, q_X^{[t+1]}) \\ &\leq C^{(\alpha, \beta)}(p_Y | W) \end{aligned}$$

(a)は分布更新式により成り立つ。 (b)は補題2により成り立つ。

Arimoto-Blahutアルゴリズム(5/5)

q_X^* : $C^{(\alpha,\beta)}(p_Y|W)$ の最適値を与える分布.

命題8

任意の $t = 0, 1, 2, \dots$ に対し, 以下が成り立つ.

$$C^{(\alpha,\beta)}(p_Y|W) - F^{(\alpha,\beta)}(q_X^{[t]}, q_X^{[t+1]}) = -\cos\alpha\cos\beta D(q_{Z|Y}^* || q_{Z|Y}^{[t]} | p_Y) - \sin\beta D(q_Z^* || q_Z^{[t]}) \\ + (\cos\alpha\cos\beta + \sin\beta) \left\{ D(q_X^* || q_X^{[t]}) - D(q_X^* || q_X^{[t+1]}) \right\}$$

命題8より次の定理が得られる.

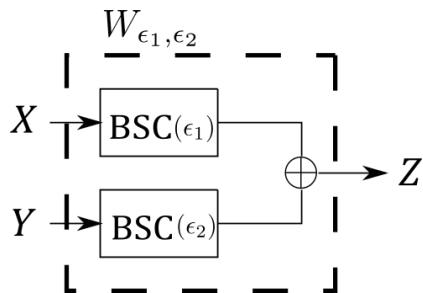
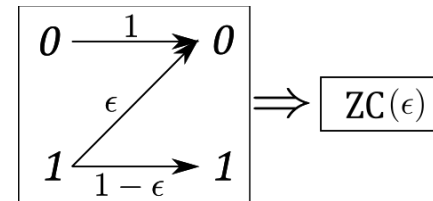
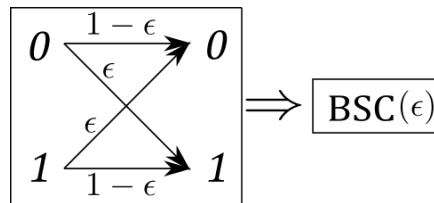
定理1

Arimoto-Blahutアルゴリズムの定める分布列 $\{q_X^{[t]}\}_{t=0}^{\infty}$ は $t \rightarrow \infty$ のとき q_X^* へ収束する.

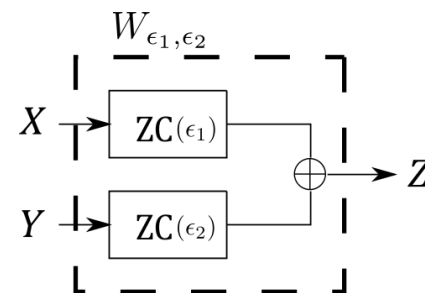
数値実験で使用した通信路

使用する通信路: BSC(Binary Symmetric Channel), ZC(Z Channel)

ϵ : 雑音により誤りが発生する確率



$(\text{BSC}(\epsilon_1), \text{BSC}(\epsilon_2))\text{-AC(Adder Channel)}$

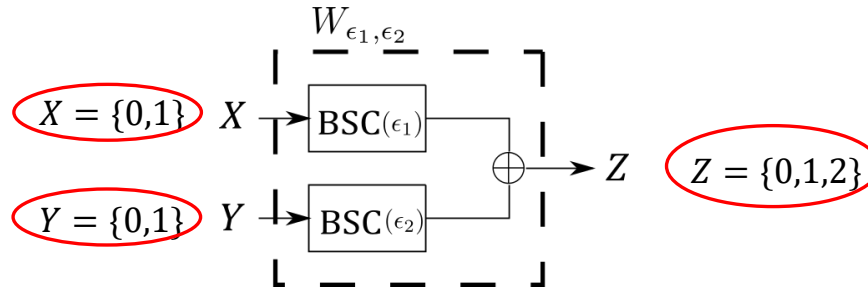


$(\text{ZC}(\epsilon_1), \text{ZC}(\epsilon_2))\text{-AC}$

2種類のMACに対する容量域計算

MACを表す確率行列について

(BSC(ϵ_1), BSC(ϵ_2))-AC:



(BSC(ϵ_1), BSC(ϵ_2))-ACは (2,2;3)-MAC になる。
 確率行列は以下で表される。

(X, Y; Z)の要素数

出力: Z

	0	1	2
$W_{\epsilon_1, \epsilon_2} =$	$(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)$	$\epsilon_1(1 - \epsilon_2) + (1 - \epsilon_1)\epsilon_2$	$\epsilon_1\epsilon_2$
	$(1 - \epsilon_1)\epsilon_2$	$\epsilon_1\epsilon_2 + (1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)$	$\epsilon_1(1 - \epsilon_2)$
	$\epsilon_1(1 - \epsilon_2)$	$(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2) + \epsilon_1\epsilon_2$	$(1 - \epsilon_1)\epsilon_2$
	$\epsilon_1\epsilon_2$	$(1 - \epsilon_1)\epsilon_2 + \epsilon_1(1 - \epsilon_2)$	$(1 - \epsilon_1)(1 - \epsilon_2)$

入力: (X, Y)

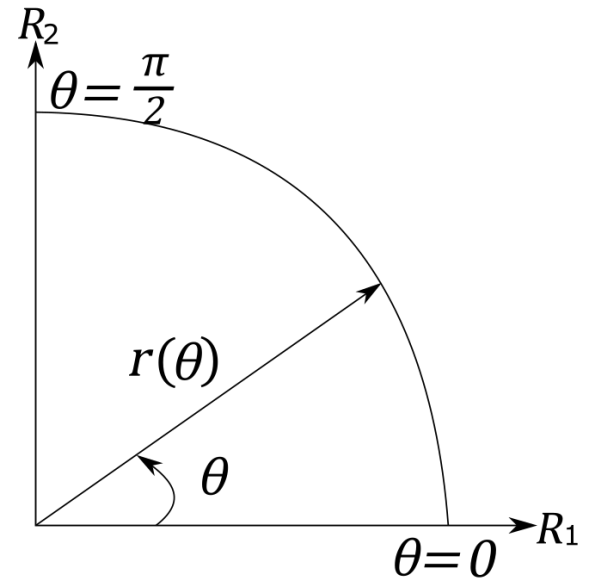
- (0,0)
- (0,1)
- (1,0)
- (1,1)

領域の境界を達成する最適分布

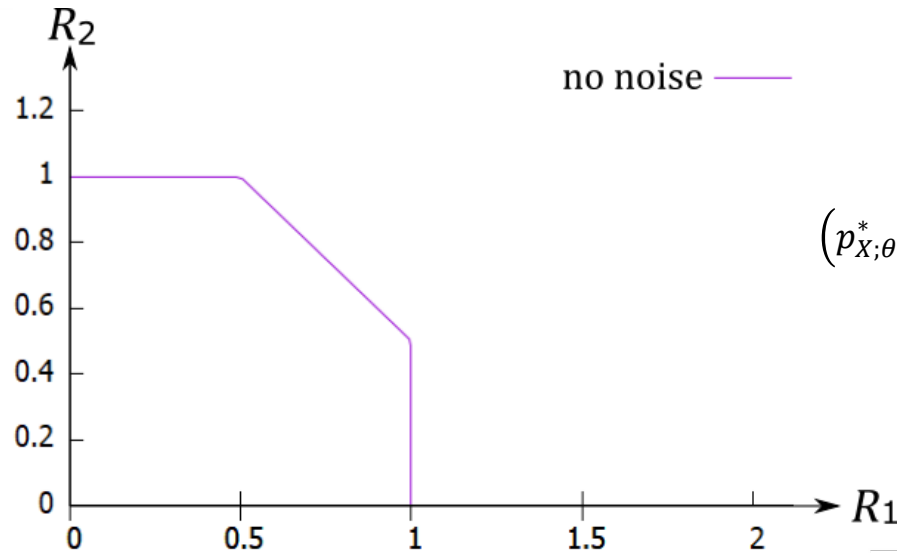
方向 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ に対する領域の境界を与える量である $r(\theta)$ を達成するを以下のように定義する.

$$\begin{cases} p_{X;\theta}^* = (p_{X;\theta}^*(0), p_{X;\theta}^*(1)) \\ p_{Y;\theta}^* = (p_{Y;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(1)) \end{cases}$$

容量域の計算とともに、各 θ に対する $(p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0))$ を求めた.



実験結果(1/3)

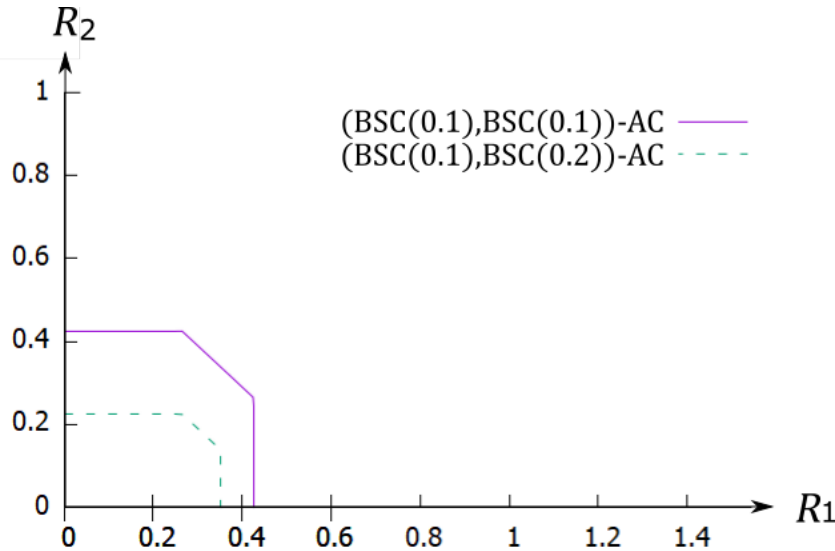


$$(p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.50, 0.50), \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

遷移確率行列の設定

$$W_{\epsilon_1=0, \epsilon_2=0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

実験結果(2/3)



$(\text{BSC}(0.1), \text{BSC}(0.1))\text{-AC:}$

$$(p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.50, 0.50), \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$(\text{BSC}(0.1), \text{BSC}(0.2))\text{-AC:}$

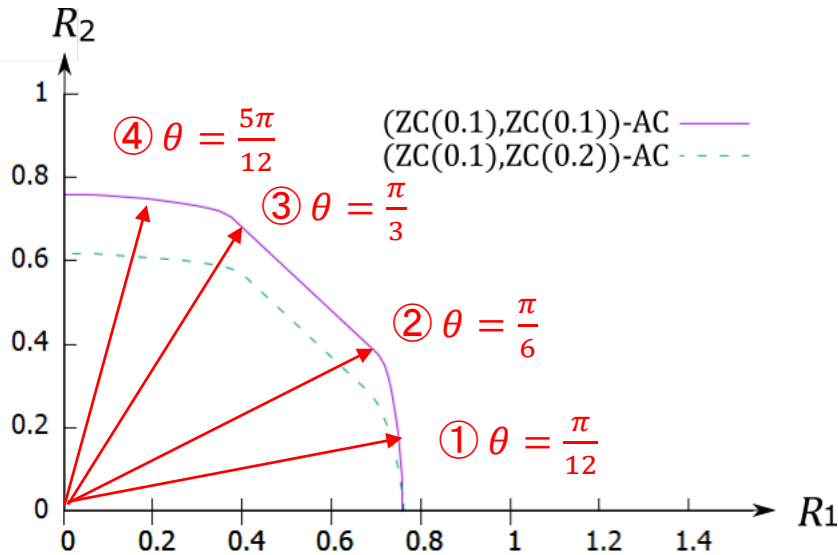
$$(p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.50, 0.48), \forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

遷移確率行列の設定

$$W_{\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.1} = \begin{bmatrix} 0.81 & 0.18 & 0.01 \\ 0.09 & 0.82 & 0.09 \\ 0.09 & 0.82 & 0.09 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{bmatrix}$$

$$W_{\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.2} = \begin{bmatrix} 0.72 & 0.26 & 0.02 \\ 0.18 & 0.74 & 0.08 \\ 0.08 & 0.74 & 0.18 \\ 0.02 & 0.26 & 0.72 \end{bmatrix}$$

実験結果(3/3)



$$\textcircled{1} (p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.54, 0.56)$$

$$\textcircled{2} (p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.53, 0.58)$$

$$\textcircled{3} (p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.53, 0.58)$$

$$\textcircled{4} (p_{X;\theta}^*(0), p_{Y;\theta}^*(0)) = (0.55, 0.56)$$

遷移確率行列の設定

$$W_{\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.1} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.01 & 0.18 & 0.81 \end{bmatrix}$$

$$W_{\epsilon_1=0.1, \epsilon_2=0.2} = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.0 \\ 0.1 & 0.9 & 0.0 \\ 0.02 & 0.26 & 0.72 \end{bmatrix}$$

Calvoら(2010)[12]との比較(1/3)

Calvoら(2010)[12]は, MACの容量域の内界と外界を計算した.

Calvoら(2010)[12]にある2つの例題につき, 厳密解を求め, 結果を比較.

\mathcal{R}_{rs}^i : 500個の分布をランダムに選び, 最適を出したMACの容量域の内界

\mathcal{R}_{rand}^i : Randomizationを用いて求めたMACの容量域の内界

\mathcal{R}_{marg}^i : Marginalizationを用いて求めたMACの容量域の内界

\mathcal{R}^o : MACの容量域の外界

c^{sum} : レートと容量

\mathcal{C}_{MAC} : 提案する領域計算アルゴリズムにより得られた(数值的に厳密な)MACの容量域

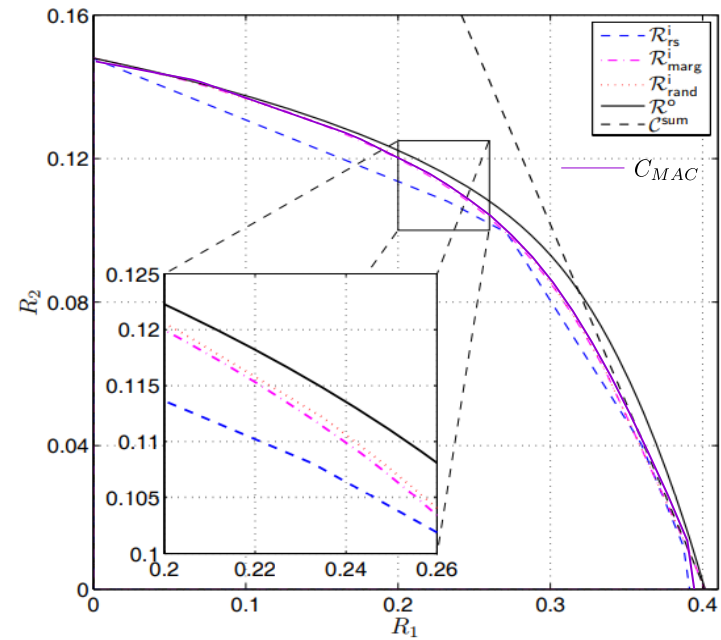
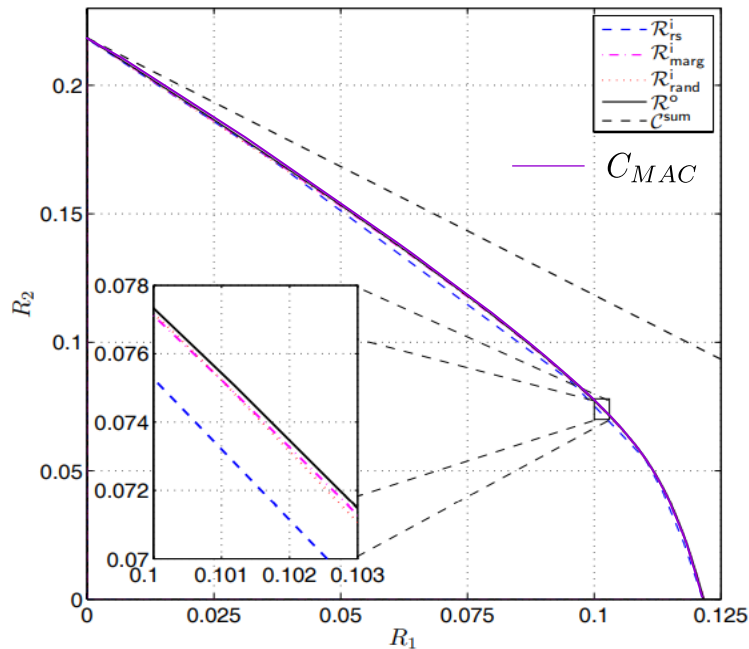
Calvoら(2010)[5]
の結果

これらを比較

本研究の結果

Calvoら(2010)[12]との比較(2/3)

以下の2つの例題をそれぞれcalvo1, calvo2とする.

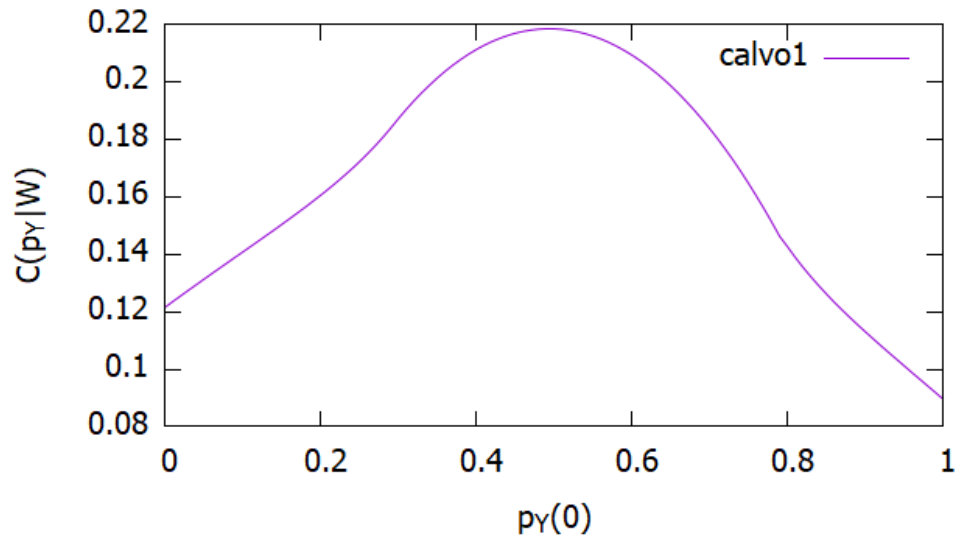


遷移確率行列の設定

$$W_{calvo1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.1 & 0.4 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$$W_{calvo2} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \end{bmatrix}$$

Calvoら(2010)[12]との比較(3/3)



$\theta = \frac{\pi}{4}$ の場合の容量域の境界を達成する入力分布 $p_Y(0)$

結論と今後の課題

- 2入力1出力MACの容量域を厳密に求めるアルゴリズムを提案し、幾つかのMACの例について、容量域を数値的に求めた。
- Calvoら(2010)[5]の得た容量域の内界と本研究で求めた容量域の厳密解が一致 ⇒ Calvoらの得た内界が最適であることを示した。
- $C^{(\alpha, \beta)}(p_Y|W)$ は入力分布 p_Y に関して非凸となる場合がある。
- Y が3値以上の場合の容量域計算への対応
⇒ $C^{(\alpha, \beta)}(W)$ を p_Y の全数探索以外の方法で求める必要。

研究(あがき)の結果

- ABアルゴリズムの多端子通信路の容量域計算への拡張:
 - 補助確率変数のマルコフ条件を緩和する手法の導入
 - 他の最適化手法との併用等



多端子通信路の容量域計算においても有効



今後の進展が大いに期待できるのではないか！

参考文献(1/2)

- [1] S. Arimoto, "An algorithm for computing the capacity of arbitrary discrete memoryless channels," *IEEE Trans. Inform Theory*, vol. 18, no. 1, pp 14-20, 1972.
- [2] R. E. Blahut, "Computation of channel capacity and rate distortion function," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 18, no. 18, no. 4, pp. 460-473, 1972.
- [3] E. Calvo, D. P. Palomar, J. R. Fonollosa and J. Vidal, "The computation of the capacity region of the discrete degraded BC is a non convex DC problem," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, Toronto, pp. 1721-1725, 2008.
- [4] 安井謙介, 須子統太, 松嶋敏泰, "拡張された有本-Blahut アルゴリズムの大域的収束性について," *電子情報通信学会論文誌*, Vol. J91-A, No. 9, pp. 846-860, 2008.
- [5] G. Kumar and A. Thangaraj, "Computation of secrecy capacity for more-capable channel pair," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, Toronto, pp. 529-533, 2008.
- [6] K. Yasui T. Matsushima, "Toward computing the capacity region of degraded broadcast channel," *Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory*, Austin, pp. 570-574, 2010.
- [7] 新井敦, 大濱靖匡, "劣化型放送通信路の通信路容量域計算アルゴリズムについて," 第37回情報理論とその応用シンポジウム(SITA2014) 予稿集, pp. 536-541, 2014年12月.

参考文献(2/2)

- [8] 八田悠司, 大濱靖匡, “劣化型放送通信路における緩和項を用いた容量域計算アルゴリズムと収束性,” 電子情報通信学会技術研究報告, IT2020-61, pp. 200-205, 2020年12月.
- [9] Y. Watanabe, “The total capacity of two-user multiple-access channel with binary output,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 42, no. 5, pp. 1453-1465, 1996.
- [10] 浜田充, 臼井純一, 韓太舜, “多重アクセス通信路の通信路容量域の計算アルゴリズムについて,” 電子情報通信学会技術研究報告, IT96-77, pp. 97-102, 1997年3月.
- [11] M. Rezaeian and A. Grant, “Computation of total capacity for discrete memoryless multiple-access channels,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 50, pp. 2779-2784, Nov. 2004.
- [12] E. Calvo, D. P. Palomar, J. R. Fonollosa, and J. Vidal, “On the computation of the capacity region of the discreteMAC,” *IEEE Trans. Communications*, vol. 58, pp. 3512-3525, Dec. 2010.
- [13] 岸本哲太, 大濱靖匡, “2入力1出力多重アクセス通信路の容量域計算,” 第44回情報理論とその応用シンポジウム(SITA2021) 予稿集, pp. 401-406, 2021年12月.