第9回
情報ネットワーク科学研究会

Innovative R&D by NTT

Mathematical analysis of brain network

2016.5.27

NTT Network Technology Laboratories
Hirotada Honda
（本多泰理）

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Agenda of talk

1. Introduction and existing studies concerning brain neurons

2. On Sompolinsky's model and formulations

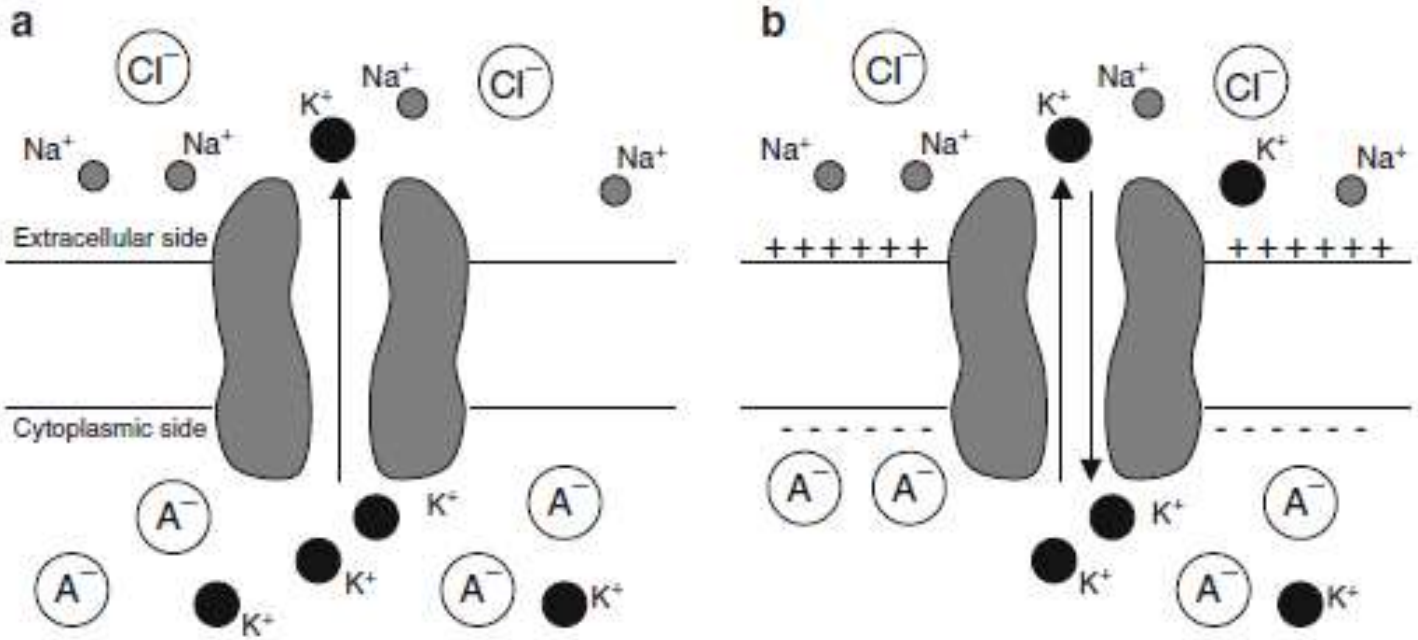
3. Mathematical analysis of Sompolinsky's *inter-cluster equation* and full model

4. Conclusion and further studies

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

神経電位の発生・伝達機構

・特定イオン(K^+, Na^+等)に対する選択的透過性を利用して神経細胞膜内の電位が変動(脱分極).
・軸索上を電位が伝達、ミリエンと呼ばれる絶縁体を跳躍し高速に伝達.



Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

背景：神経電位の同期発火に関する研究

・猫の一次視覚野に関する研究[1]
・ニューロン活動を観測、約40Hzの周期で
　同期発火を確認
・光の棒を見せた際に同期発火を観測

[1]Gray, C.M. & Singer, W. ,
　Stimulus–specific neuronal oscillations in orientation columns of cat visual cortex, Proceedings of National Academic Science, USA, **86**, 1698–1702, 1989.

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

【reference】experiment concerning monkey

- 与えられた課題を行っているサルの二次体性感覚野から複数のニューロン活動を記録し、同時に記録したニューロン活動のタイミングを観測[2]。

- 体性感覚の刺激に対し注意を払った時に同期したニューロン活動が見られた。

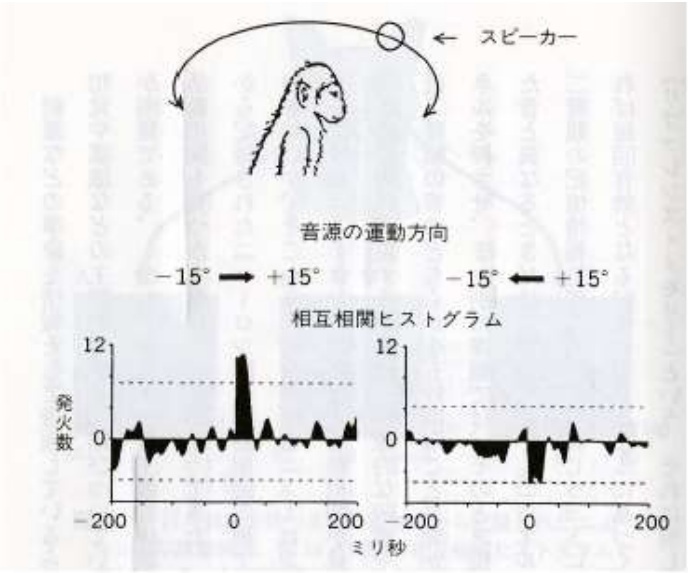
- [2] P. N. Steinmetz, et al., Attention modulates synchronized neuronal firing in primate somatosensory cortex, Nature, 404, 187-190 (2000)

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Synfire chain hypothesis

・相関したニューロンの活動が情報の表現の基本単位であるという仮説

Under appropriate conditions, volleys of synchronized spikes can propagate through the cortical network by travelling along chains of groups of cortical neurons.
(G.Mo, 2001)



Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Somplolinsky (1990, 91)

・Gray&Singer[1]の結果に基づき、一次視覚野の神経細胞の同期発火現象を、以下の特性を加味したモデルとして提案[3]：

◆一次視覚野(V1)を複数のクラスタ(=hypercolumn)に分類;
◆◆ 同一クラスタに属するニューロンは強く結合;
◆異なるクラスタに属するニューロンは同士は弱結合だが、選択的指向性が合致する場合には強く結合.

・相互作用下での多数の神経細胞の電位の位相の時間発展を、結合振動子の位相縮約モデルとして記述

•[3] Sompolinsky,H, et al., Cooperative dynamics in visual cortex, Physical Review A, 43 (1991).

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Example of V(θ)

θ_0: orientation of stimuli and θ: preferred orientation by the neuron.

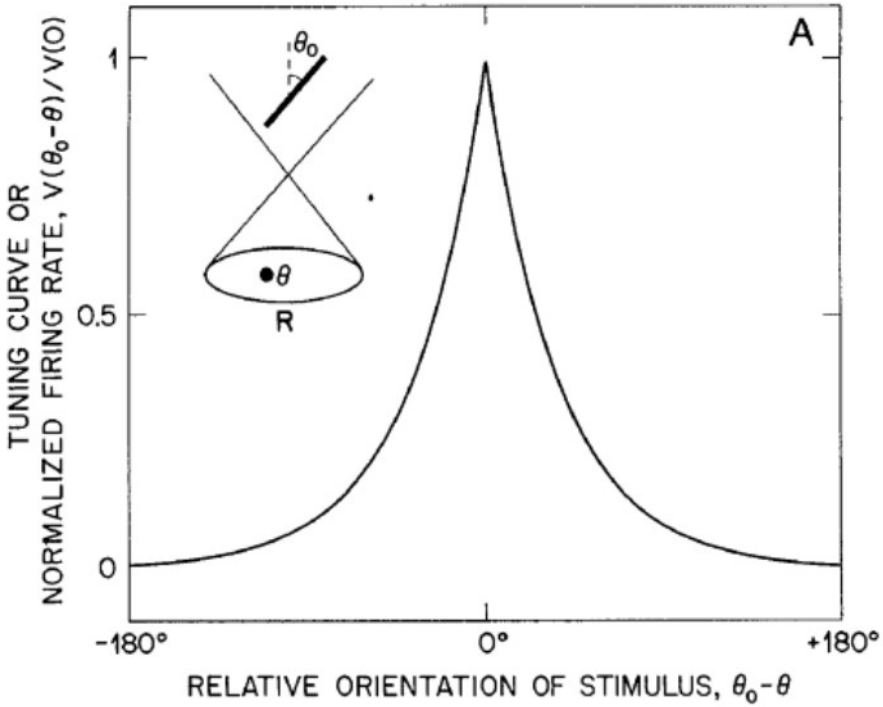


図1. ある細胞についての
発火指向性

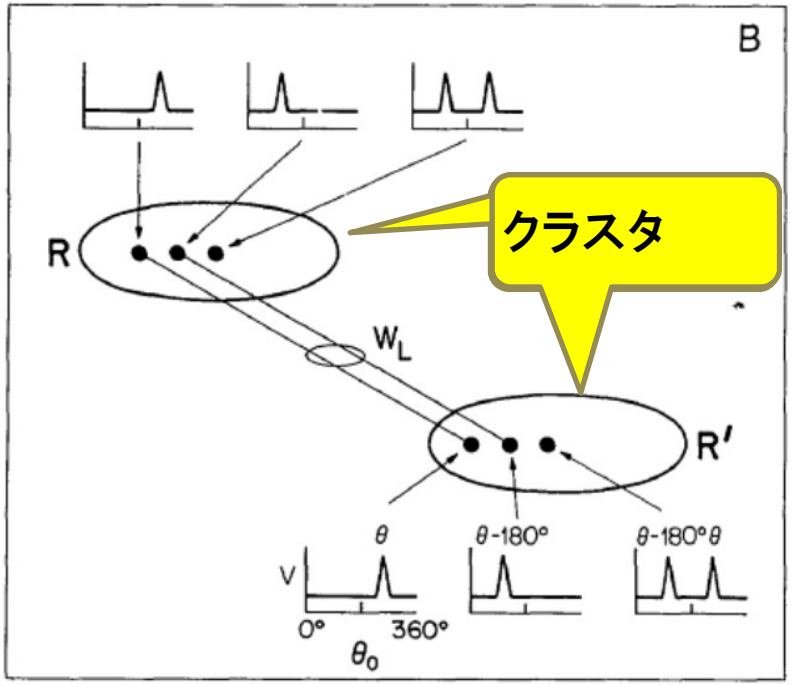
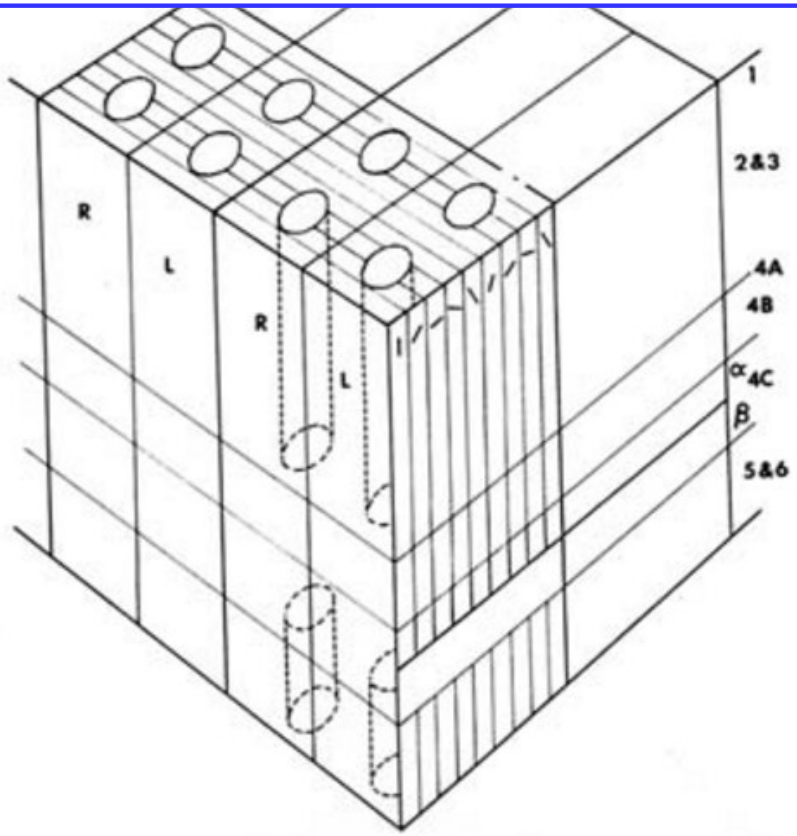


図2. 異なるクラスタ間の関連

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Hypercolumn in V1

・一次視覚野(V1)内の神経細胞が，それぞれは同一の機能を有するが異なる方位嗜好性を有する視細胞ごとのクラスタに分類できるとする仮説.
・’81年にノーベル賞を受賞したヒューベルとウィーゼルが立案.
・物理的機構としての対応付けは未だに発見されていないが、機能構造を説明する上では現在も主流となっている仮説.



2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Sompolinsky's model (Full model)

The unknown variable is *phase* ϕ_R of the burst of neuroral firing.

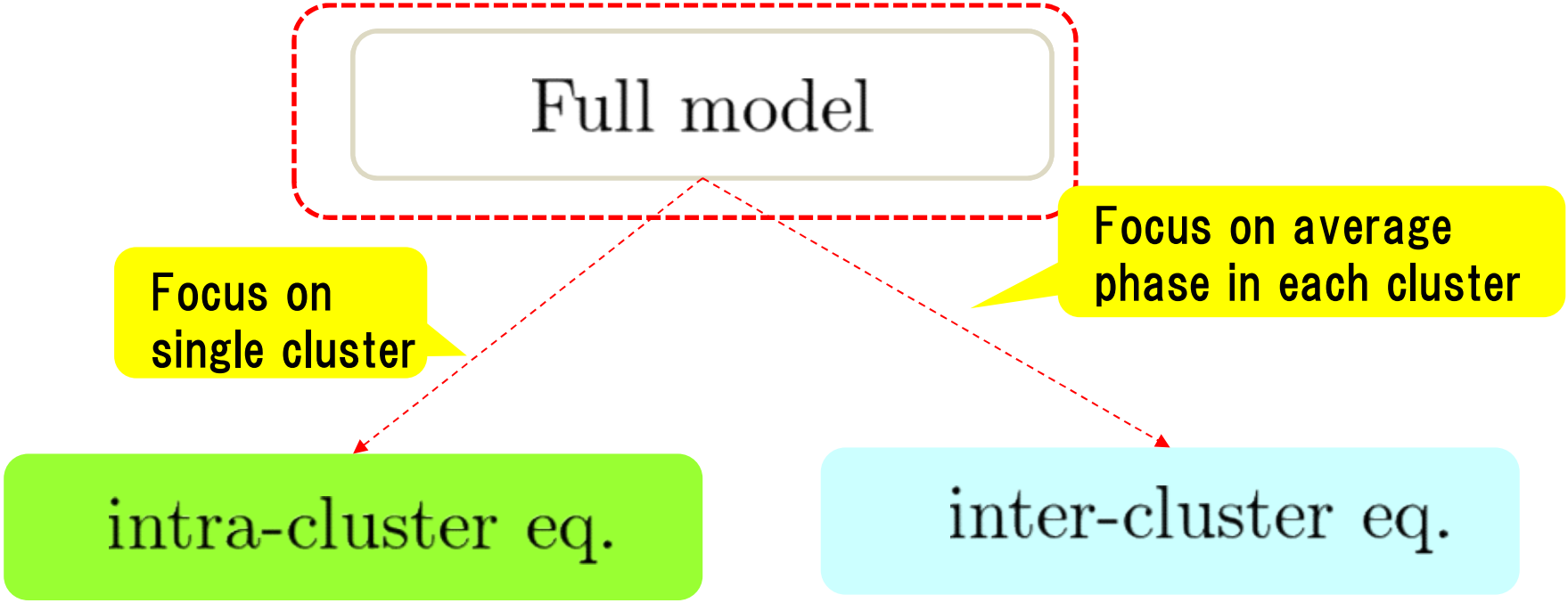
$$\tau_0\dot{\phi}_{\mathbf{R}}(\theta, t) = \eta_{\mathbf{R}}(\theta, t) - (W_S/N)\sum_{\theta'} V_{\mathbf{R}}(\theta)V_{\mathbf{R}}(\theta')\sin(\phi_{\mathbf{R}}(\theta, t) - \phi_{\mathbf{R}}(\theta', t)) - (W_L/N^2)\sum_{\mathbf{R}'\neq\mathbf{R}}\sum_{\theta'} V_{\mathbf{R}}(\theta)F(\theta-\theta')V_{\mathbf{R}'}(\theta')\sin(\phi_{\mathbf{R}}(\theta, t) - \phi_{\mathbf{R}'}(\theta', t)). \quad \textbf{[A1]}$$

η_R is noise, N: the number of neurons, W_S, the coupling strength of neurons in the same cluster, W_L, the coupling strength of neurons in different clusters, $F(\theta-\theta')$, strength of phase coherence as a function of the difference of preferred orientation.

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Sompolinsky's approaces

He derived two abbreviations: intra- and iter- cluster equations:



本多:JSIAM連合発表会(2016.3)

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Intra-cluster equation

本多:JSIAM連合発表会(2016.3)

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Intra-cluster equation

一次視覚野の中で、近くのニューロン同士の結合関係のみを取り出し平均場近似を適用：

Full model

$$\tau_0\dot{\phi}_{\mathbf{R}}(\theta, t) = \eta_{\mathbf{R}}(\theta, t) - (W_S/N)\sum_{\theta'} V_{\mathbf{R}}(\theta)V_{\mathbf{R}}(\theta')\sin(\phi_{\mathbf{R}}(\theta, t) - \phi_{\mathbf{R}}(\theta', t)) - (W_L/N^2)\sum_{\mathbf{R}'\neq\mathbf{R}}\sum_{\theta'} V_{\mathbf{R}}(\theta)F(\theta-\theta')V_{\mathbf{R}'}(\theta')\sin(\phi_{\mathbf{R}}(\theta, t) - \phi_{\mathbf{R}'}(\theta', t)). \quad \text{[A1]}$$

Intra-cluster equation

$$\tau_0\dot{\phi}(\theta, t) = \eta(\theta, t) - W_S M\, V(\theta)\sin(\phi(\theta, t) - \psi),$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Formulation

For simplicity, we hereafter use the notation $\Omega \equiv (-\pi, \pi)$.

Intra-cluster equation

$$\tau_0 \dot{\phi}(\theta, t) = \eta(\theta, t) - W_S M(t) V(\theta) \sin(\phi(\theta, t) - \psi),$$

where the orientation of the stimulus is taken to be $\theta_0 = 0$, M is the order parameter defined by

$$M(t) \equiv \frac{1}{\sigma} \int_0^{2\pi} V(\theta) m(\theta, t) \, \mathrm{d}\theta,$$

$\eta(\theta, t)$ is the Wiener process with the variance

$$2D\delta(t - t')\delta_{\theta\theta'}\delta RR',$$

W_S, the coupling strength; $V(\theta)$, the tuning curve of the neuron; ψ, the average phase, and the local order parameter $m(\theta, t)$ is defined by

$$m(\theta, t)e^{i\psi} = E[e^{i\phi(\theta,t)}].$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Deduction of Fokker-Planck equation

Regarding the second term in the right-hand side as the drift term, we derive the corresponding Fokker-Planck equation.

$$\tau_0 \dot{\phi}(\theta, t) = \eta(\theta, t) \boxed{- W_S M(t) V(\theta) \sin(\phi(\theta, t) - \psi),}$$

$$\tau_0 \varrho_t - D \varrho_{\phi\phi} + \frac{\partial}{\partial \phi} \left[W_S M(t) V(\theta) \varrho(\phi, t; \theta) \sin(\phi - \psi) \right] = 0. \tag{3.1}$$

It is easy to see

$$M(t) \sin(\phi - \psi) = \frac{1}{\sigma} \int_\Omega V(\theta') \varrho(\tau, t; \theta') \sin(\phi - \tau) \, \mathrm{d}\theta'.$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Formulation

Thus, imposing initial and boundary conditions, (3.1) becomes

$$
(3.2) \qquad \begin{cases} \tau_0 \varrho_t - D\varrho_{\phi\phi} \\ \qquad + \dfrac{W_S V(\theta)}{\sigma} \dfrac{\partial}{\partial \phi} \left[\varrho(\phi, t; \theta) \displaystyle\int_\Omega V(\theta')\, \mathrm{d}\theta' \int_\Omega \varrho(\tau, t; \theta') \sin(\phi - \tau)\, \mathrm{d}\tau \right] = 0, \\ \left. \dfrac{\partial^i \varrho}{\partial \phi^i} \right|_{\phi=0} = \left. \dfrac{\partial^i \varrho}{\partial \phi^i} \right|_{\phi=2\pi} \qquad (i = 0, 1), \\ \varrho|_{t=0} = \varrho_0. \end{cases}
$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Preparation ～norms and function spaces ～

Due to the definition of the Fourier series, the Fourier coefficients a_n $(n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ are defined by

$$a_n(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_\Omega \varrho(\theta; \omega) e^{in\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

$$\|u\|_{L_p(a,b;E)} \equiv \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b \|u(t)\|_E^p \, \mathrm{d}t \right)^{1/p} & (1 \le p < \infty), \\ \displaystyle\sup_{a \le t \le b} \|u(t)\|_E & p = \infty. \end{cases}$$

$$V^m(\overline{\Omega}) \equiv \left\{ u(\theta; x, \omega) \in V^m(\Omega; C^\infty_{x,\omega}(\mathbf{R}^2) \right\},$$

$$L_1^{(1)} \equiv \left\{ u(\cdot; x, \omega) \in L_1(\Omega) \middle| u \ge 0, \int_\Omega u(\theta; x, \omega) \, \mathrm{d}\theta = 1 \ (x, \omega) \in \mathbf{R}^2 \right\},$$

$$L_1^{(1)}(T) \equiv \left\{ u(\cdot, t; x, \omega) \in L_1(\Omega) \middle| u \ge 0, \int_\Omega u(\theta, t; x, \omega) \, \mathrm{d}\theta = 1 \ t \in (0, T), \ (x, \omega) \in \mathbf{R}^2 \right\},$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Solvability of (3.1)

Theorem 3.1. *Let us assume following issues:*

(i) $V \in C^\infty(\Omega)$, $V(\theta) \geq 0$ *on* Ω, *and* $M_V \equiv \int_\Omega V(\theta)\,\mathrm{d}\theta < \infty$;

(ii) $\varrho_0 \in V^2(\Omega)$;

(iii) $\int_\Omega \varrho_0(\phi;\theta)\,\mathrm{d}\phi = 1$ *for each* $\theta \in \Omega$, *and* $\varrho_0 \geq 0$ *on* $\Omega \times \Omega$.

Then, for arbitrary $T > 0$, *there exists a solution* $\varrho(\phi, t; \theta)$ *to* (3.2) *satisfying*

$$\varrho \in L_\infty(0, T; V^2(\overline{\Omega})) \bigcap C^1(0, T; V^0(\overline{\Omega}))$$

and

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \phi}(\phi, t; \theta) \in L_2(0, T; \overline{V}^2(\Omega)).$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Stability of *incoherence*

Theorem 3.2. *In addition to the assumptions in* Theorem 3.1, *let us define*

$$G_D \equiv \left\{ \theta \in \Omega \middle| 2(1+\sqrt{2})W_S V(\theta) M_V \sigma^{-1} < D \right\},$$

and assume $G_D \neq \phi$. *Then, the trivial stationary solution to* (3.2) $\bar{\varrho} = 1/2\pi$ *is stable on* G_D, *and any solution* ϱ *to* (3.2) *enjoys the decay estimate*

$$\|(\varrho - \bar{\varrho})(t)\|_{V^2(\overline{\Omega})} \leq d_1 \|\varrho_0 - \bar{\varrho}\|_{V^2(\overline{\Omega})} e^{-d_2 t}$$

with positive constants d_i $(i = 1, 2)$.

「自明定常解の安定性のための十分条件」つまり
「同期が発生しないための十分条件」
を陽に求める。

定性的には、
「結合強度に比してノイズレベルが十分高いと同期が起きない」

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Proof of Theorem 3.2

We discuss the temporal decay of the perturbation $\tilde{\varrho} \equiv \varrho - 1/2\pi$ which satisfies

$$(3.6) \qquad \tau_0 \tilde{\varrho}_t - D\tilde{\varrho}_{\phi\phi} + \frac{W_S V(\theta)}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\tilde{\varrho}(\phi, t; \theta) + \bar{\varrho} \right) \int_\Omega V(\theta')\, \mathrm{d}\theta' \int_\Omega \tilde{\varrho}(\tau, t; \theta') \sin(\phi - \tau)\, \mathrm{d}\tau \right] = 0.$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Proof of Theorem 3.2

The *a-priori* estimate is obtained through the following estimate:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \tilde{\varrho}(\phi,t;\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}\left[\left(\tilde{\varrho}(\phi,t;\theta)+\bar{\varrho}\right)\int_\Omega V(\theta')\,\mathrm{d}\theta'\int_\Omega \tilde{\varrho}(\tau,t;\theta')\sin(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\phi \\
&\quad = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\tilde{\varrho}(\phi,t;\theta)\right)^2\left(\int_\Omega V(\theta')\,\mathrm{d}\theta'\int_\Omega \tilde{\varrho}(\tau,t;\theta')\cos(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\phi \\
&\qquad + \frac{1}{2\pi}\int_\Omega \tilde{\varrho}(\phi,t;\theta')\left(\int_\Omega V(\theta')\,\mathrm{d}\theta'\int_\Omega \tilde{\varrho}(\tau,t;\theta')\cos(\phi-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\phi \\
&\quad \le M_V\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|\!|\!|\tilde{\varrho}(t)|\!|\!|^2.
\end{aligned}
$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Proof of Theorem 3.2

Thus, taking the supremum with respect to $\theta \in \Omega$ in each term, we arrive at

$$\frac{\tau_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|||\tilde{\varrho}(\cdot,t;\theta)|||^2 + D|||\tilde{\varrho}_\phi(\cdot,t;\theta)|||^2 \le \frac{W_S V(\theta) M_V}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)|||\tilde{\varrho}(t)|||^2. \tag{3.7}$$

$$\|\tilde{\varrho}(\cdot,t;\theta)\|^2 \le 4\|\tilde{\varrho}_\phi(\cdot,t;\theta)\|^2$$

$$\frac{\tau_0}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|||\tilde{\varrho}(\cdot,t;\theta)|||^2 + \left\{\frac{D}{4} - \frac{W_S V(\theta) M_V}{\sigma}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}|||\tilde{\varrho}(\cdot,t;\theta)|||^2 \le 0.$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Proof of Theorem 3.2

By virtue of the Gronwall's lemma, if

$$\frac{D}{4} - \frac{W_S V(\theta) M_V}{\sigma}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$$

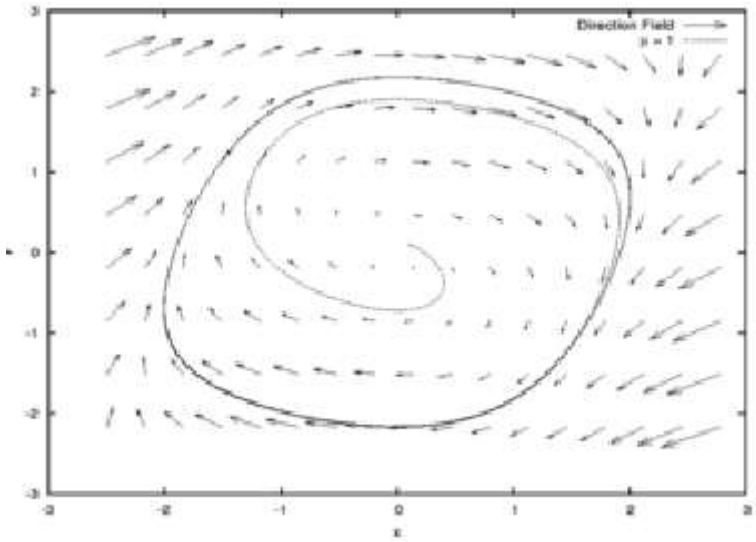
holds, we then have the estimate of the form

$$|||\tilde{\varrho}(\cdot, t; \theta)|||^2 \leq C_1 e^{-C_2 t}$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

On attractor and inertial set

It is known that the orbit of the dissipative systems are sometimes absorbed rapidly by a finite dimensional set or manifold.



Maximal attractor → exponential attractor → Inertial set → Inertial manifold

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Maximal attractor

Concering the behavior of as a dynamical system, We also have following theorems.

Theorem 4.1. *The semigroup $S(t)$ associated with (3.2) possesses a compact maximal attractor in $\overline{V}^2(\Omega)$ that is simple and connected.*

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Inertial set

Definition 1. *Let H be a separable Hilbert space and B be a compact subset of H, which is invariant under a continuous semi-group $S(t)$. Let $\mathcal{A}$ be the maximum attractor for $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ on B. Then, a set M is called an inertial set for $(\{S(t)\}_{t\geq 0}, B)$ if it has finite fractal dimension $d_f(M)$ and moreover satisfy following items:*

(i) $\mathcal{A} \subset M \subset B, \quad S(t)M \subset M$ *for every* $t \geq 0$;

(ii) *for every* $u_0 \in B$, $\mathrm{dist}_H(S(t)u_0, M) \leq C_1 e^{-C_2 t}$ *with positive constants* C_i $(i = 1, 2)$ *independent of* u_0.

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Squeezing property

Definition 2. *A continuous semigroup* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ *is said to satisfy the squeezing property on* B *if there exists* $t_* > 0$ *such that* $S_* = S(t_*)$ *satisfies:there exists an orthogonal projection* P *of rank* N_0 *such that if for every* u *and* v *in* B *satisfying*

$$\|P(S_*u - S_*v)\|_H \leq \|(I-P)(S_*u - S_*v)\|_H$$

then

$$\|S_*u - S_*v\|_H \leq \frac{1}{8}\|u - v\|_H.$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Results by Eden

We use the following result due to Eden et al. [2]:

Theorem 3. *If $\{S(t)_{t\geq 0}\}$ satisfies the squeezing property on B and if $S_* = S(t_*)$ is Lipschitz continuous on B with Lipschitz constant L, then there exists an inertial set M for $(\{S(t)\}_{t\geq 0}, B)$ such that*

$$d_f(M) \leq N_0 \max\{1, \ln(16L+1)/\ln 2\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{dist}_H(S(t)B, M) \leq C \exp\Big(-C_2 t/t_*\Big). \tag{3}$$

[2] Eden, A., Milrani, A. J. and Nicolaenko, B., Finite dimensional exponential attractors for semilinear wave equations with damping, *IMA preprint Series*, **693** (1990).

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Existence of inertial set

Theorem 4.2. *The semigroup $S(t)$ associated with (3.2) possesses an inertial manifold in $\overline{V}^1((\Omega))$. It also has an inertial set M satisfying*

$$d_f(M) \leq N_0 \max\{1, \ln(32\pi + 1)/\ln 2\},$$
$$\mathrm{dist}(S(t)B, M) \leq p_1 e^{-\frac{p_2 t_*}{t}},$$

where $d_f(M)$ means the fractal dimension of M, B, an arbitrary bounded set in $\overline{V}^2(\Omega)$, $t_* = 6\ln 2/\lambda_{(1)}$ with $\{\lambda_{(i)}\}_{i=1}^{\infty}$ being non-zero eigenvalues of $D\triangle$ in the ascending order of magnitude, and N_0 is taken sufficiently large.

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Analysis of full model

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Deviation of Fokker-Planck eq.

We introduce another order parameter:

$$r_2(\theta)e^{i\psi_2(\theta)} \equiv \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}r' \int_{\Omega}\int_{\Omega} \mathrm{d}\theta' F(\theta-\theta')V(\theta';r')e^{i\phi}\varrho(\phi,\theta',t;r')\,\mathrm{d}\phi.$$

$$\begin{aligned}\tau_0\dot{\phi}_{\mathbf{R}}(\theta,t) &= \eta_{\mathbf{R}}(\theta,t)\\ &\quad -(W_S/N)\sum_{\theta'} V_{\mathbf{R}}(\theta)V_{\mathbf{R}}(\theta')\sin(\phi_{\mathbf{R}}(\theta,t)-\phi_{\mathbf{R}}(\theta',t))\\ &\quad -(W_L/N^2)\sum_{\mathbf{R}'\neq\mathbf{R}}\sum_{\theta'} V_{\mathbf{R}}(\theta)F(\theta-\theta')V_{\mathbf{R}'}(\theta')\\ &\quad \sin(\phi_{\mathbf{R}}(\theta,t)-\phi_{\mathbf{R}'}(\theta',t)). \qquad \textbf{[A1]}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\phi,t;\theta,r)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left\{W_S V(\theta,r)M_R(t)\sin(\phi-\psi_r)-W_L V(\theta,r)r_2(t;\theta)\sin(\phi-\psi_2(t;\theta))\right\}(\phi,t;\theta,r)\right]$$
$$-D\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varrho(\phi,t;\theta,r)=0.$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Deviation of Fokker-Planck eq.

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(\phi,t;\theta,r)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left\{W_S V(\theta,r)M_R(t)\sin(\phi-\psi_r)-W_L V(\theta,r)r_2(t;\theta)\sin(\phi-\psi_2(t;\theta))\right\}\varrho(\phi,t;\theta,r)\right]$$
$$-D\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\varrho(\phi,t;\theta,r)=0.$$

θ :orientation preference [parameter]

r :number of hypercolumn [parameter]

ϕ : phase of neuronalfiring [independent variable]

t : time [independent variable]

$F(\theta-\theta')$: difference in orientation preference [known]

$V(\theta,r)$: orientation preference in each cluster[known]

ϱ : probability distribution of phase [unknown]

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Deviation of Fokker-Planck eq.

By using

$$M(r)\sin\phi\cos\psi(r) - M(r)\cos\phi\sin\psi(r) = \int_{\Omega} V(\theta, r)\left(\varrho(\phi', t; \theta, r)\sin(\phi - \phi')\mathrm{d}\phi'\right)\mathrm{d}\theta,$$

$$r_2(t;\theta)\sin(\phi - \psi_2(t)) = \int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}r'\left\{\int_{\Omega} F(\theta - \theta')V(\theta', r')\left(\int_{\Omega} \varrho(\phi', t; \theta', r')\sin(\phi - \phi')\mathrm{d}\phi'\right)\mathrm{d}\theta'\right\}$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Deviation of Fokker-Planck eq.

and taking periodicity of ϱ with respect to ϕ and the initial condition, we have

$$
\begin{cases}
\tau_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\varrho(\phi,t;\theta,r) + W_S \dfrac{\partial}{\partial \phi}\left[V(\theta,r)\left\{\displaystyle\int_\Omega V(\theta',r)\left(\int_\Omega \varrho(\phi',t;\theta',r)\sin(\phi-\phi')\mathrm{d}\phi'\right)\mathrm{d}\theta'\right\}\varrho(\phi,t;\theta,r)\right] \\
\quad - W_L \dfrac{\partial}{\partial \phi}\left[V(\theta,r)\left\{\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}r' \int_\Omega F(\theta-\theta')V(\theta',r')\left(\int_\Omega \varrho(\phi',t;\theta',r')\sin(\phi-\phi')\mathrm{d}\phi'\right)\mathrm{d}\theta'\right\}\varrho(\phi,t;\theta,r)\right] \\
\quad - D\dfrac{\partial^2}{\partial \phi^2}\varrho(\phi,t;\theta,r) = 0, \\
\dfrac{\partial^j}{\partial \phi^j}\varrho\Big|_{\phi=0} = \dfrac{\partial^j}{\partial \phi^j}\varrho\Big|_{\phi=2\pi} \quad (j=0,1) \\
\varrho|_{t=0} = \varrho_0
\end{cases}
$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Conclusion and further studies

【Conclusion】
・Sompolinskyにより提案された同期発火モデルのfull versionに対応する Fokker-Planck方程式の提案を行った.

【Further studies】
・今後，可解性証明、安定性の議論などの理論解析に加え、数値解析に基づく実験結果との突合を通じてモデルの妥当性を検証する.

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Thank you for your attention.

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

references

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

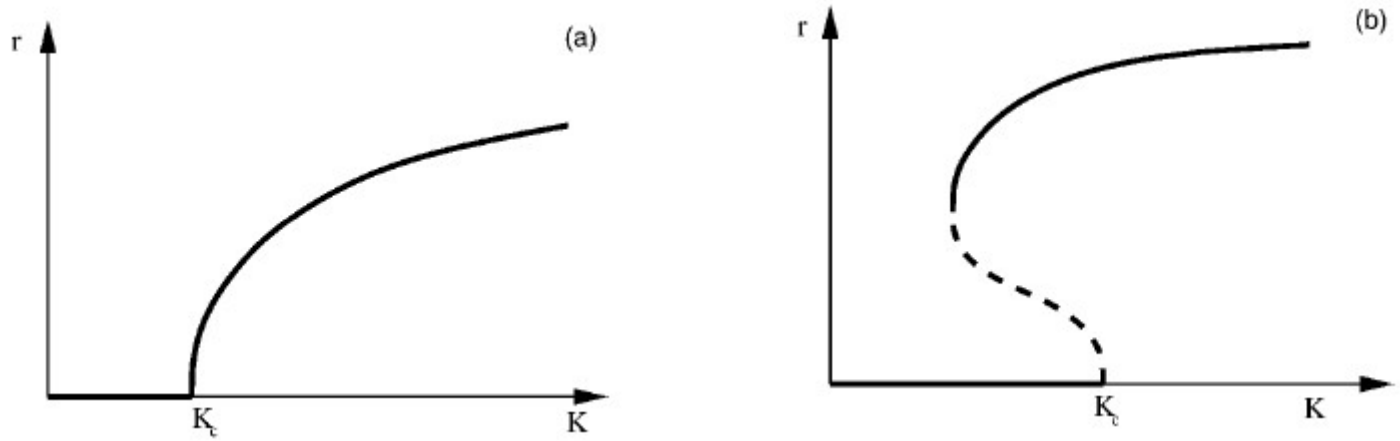
Well known properties of Kuramoto model

- Synchronization occurs with the coupling strength K over a certain threshold K_c.
- With K below K_c, the synchronization disappears.

Bifurcation with respect to K:

(a) supercritically for $K > K_c$ if $g''(0) < 0$

(b) subcritically for $K < K_c$ if $g''(0) > 0$



Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

$$r = \int_{|\omega|<Kr} \cos\left[\sin^{-1}\left(\frac{\omega}{Kr}\right)\right] g(\omega)\, d\omega$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\, g(Kr\sin\theta)\, Kr\cos\theta\, d\theta,$$

$$r = Kr\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta\, g(Kr\sin\theta)\, d\theta.$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Examples

For certain specific forms of g(ω), Kc and r are caluclated (Kuramoto('84)):

$$g(\omega) = \frac{\gamma/\pi}{\gamma^2 + \omega^2},$$

$$r = \sqrt{1 - (K_c/K)} \qquad K > K_c = 2\gamma.$$

In general ・・・ (Kuramoto('84))

$$r \sim \sqrt{\frac{-16(K - K_c)}{\pi K_c^4 g''(0)}},$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

Coherent solution (D=0)

・Kuramoto ('84) derived the coherent solution under the assumption of the symmetry of g(ω) when D=0.

$$\rho = \begin{cases} \delta\left[\theta - \psi - \sin^{-1}\left(\dfrac{\omega}{Kr}\right)\right] H(\cos\theta), & |\omega| < Kr \\ \dfrac{C}{|\omega - Kr\sin(\theta - \psi)|} & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

$$C = \sqrt{\omega^2 - (Kr)^2}/(2\pi).$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

NTT研究所における“ネットワーク科学”

- ネットワークの使われ方の多様化や複雑化・大規模化に伴い、個々の要素を完全に掌握し既存のネットワーク技術だけでは対応が困難になってきた。
- 既存のアプローチに加え、異分野の新技術も交えた学際的アプローチを中心としたネットワーク科学により、革新的な将来ネットワーク技術を創造。

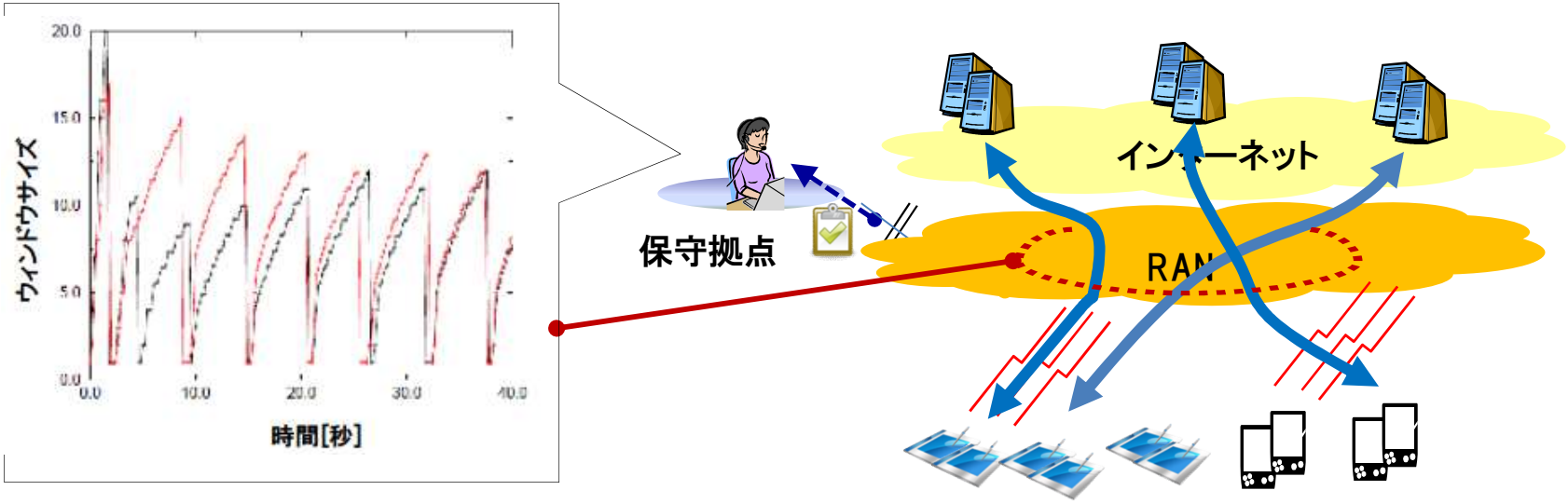
空間情報数理

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

モバイル網への適用

スマートフォンやタブレット端末の普及に伴い、頻繁な網への接続・切断が論理的トポロジーの時間変動を増幅し、網の設計・制御上看過できない状況である。
一方で、TCPレイヤにおいて、自律的制御により通信品質を確保する方式は様々存在するが、時として相互に影響を及ぼしあうことで同期し、結果的に全体の可用帯域を非効率化させてしまう問題※）も指摘されている。

簡易なNW観測に基づき，全体もしくは一部のセッションの同期有無を推定/予測できる技術を構築したい
※）TCPウィンドウ制御の機構が、網内でのパケットロス等を契機に複数端末間で同期する現象[1]



[1] H.Han, C. V. Hollot, D. Towsley, Y. Chait, Synchronization of TCP Flows in Networks with Small Drop Tail Buffers, CDC-ECC2005(2005).

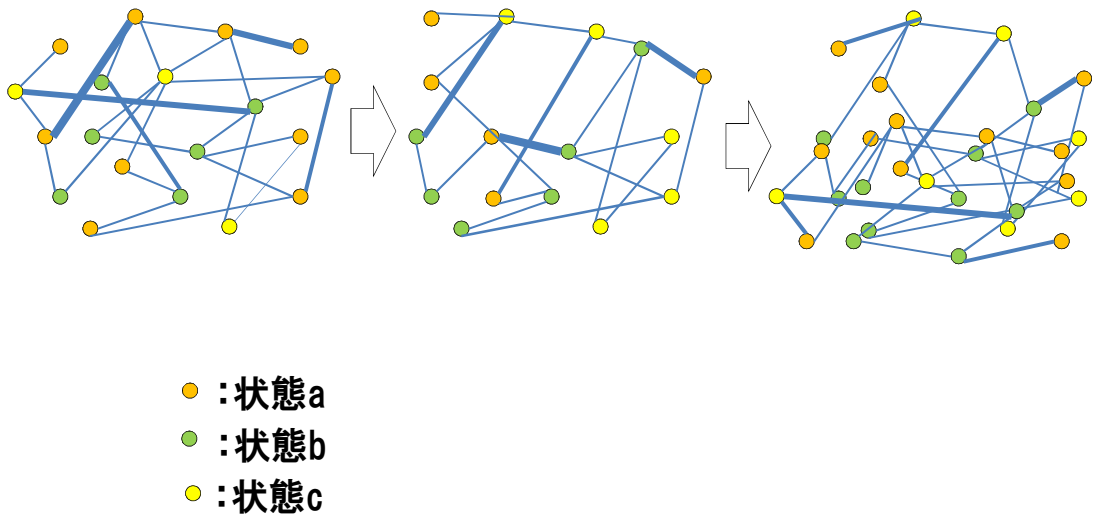
Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチ

モバイルネットワーク上での同期現象を記述するため、以下のアプローチを採用する:
① 論理的ネットワークを対象に、セッションの接続や消滅、セッション間の相互作用の有無や時間変動を勘案した抽象的モデル)を採用。特にセッションが多数存在する大規模なモデルを想定。

② 上記の上でノードの状態(例えばTCPスループットや輻輳ウィンドウサイズ)の結合振動モデルを構築し、ノード状態の時間発展を追跡可能なモデルを提案。

以上により、将来的に観測可能なパラメータから、全体としての網の効率利用を実現する設計・制御手法を検討できるようにする。



① 想定するネットワークモデル

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega - c\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}\sin(\phi_j - \phi_\ell + \alpha)$$

$\phi_i(t)$:時刻tにおけるノードiの位相

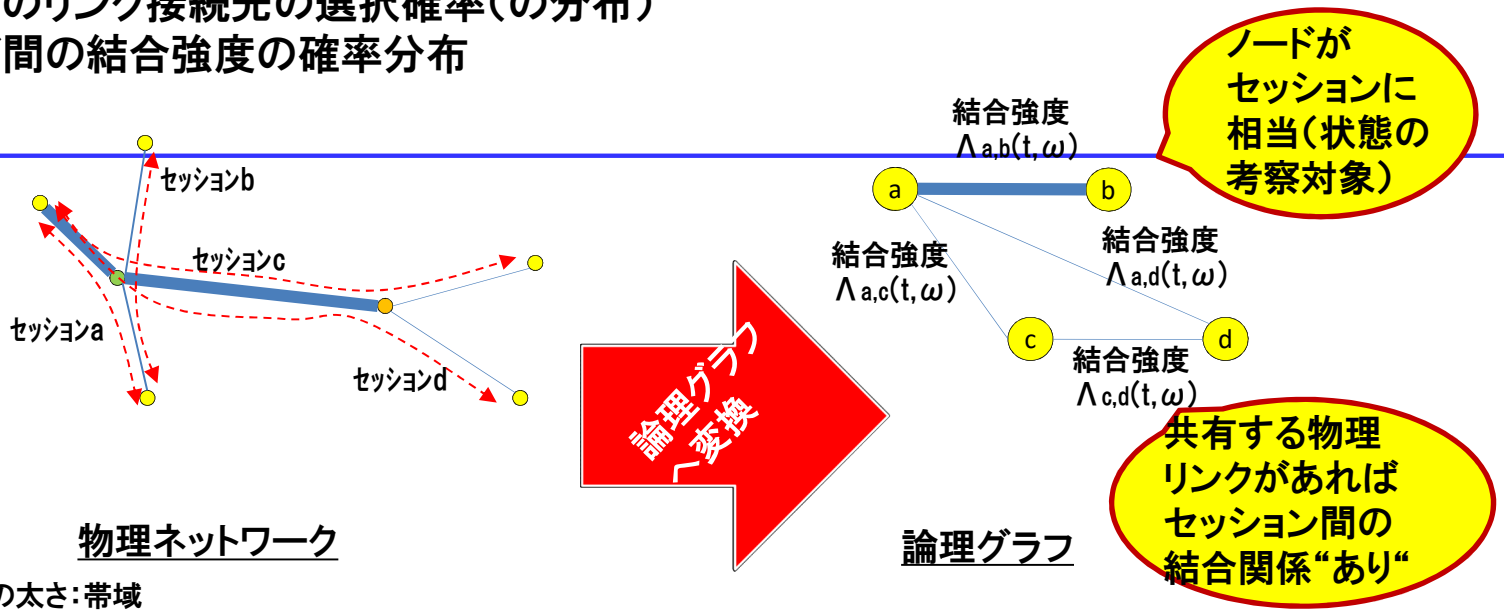
② ネットワーク上の結合振動モデル

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

提案手法の詳細[1] ～ネットワークモデルについて～

【解決したいこととアイディア】
本検討では、時間変動するネットワーク上で、各セッションの位相(TCPスループット等)を記述したい。
そこで、古典的ランダムグラフの概念に時間的概念を導入し(dynamic random graph[5])
かつグラフの各ノードにセッションをマッピングする手法を採用する。

【提案手法の詳細】
各ノード(すなわち物理的にいうセッション)は出生死滅過程に従い(出生はポアソン過程、持続時間は指数分布)、更に新規ノード出生時、当該時点で存在する他ノードとのリンクを接続率pで確立する。従って、当該モデルは以下をパラメータとする:
(i) 各ノードの出生・死滅過程
(ii) 各ノードのリンク接続先の選択確率(の分布)
(iii)各ノード間の結合強度の確率分布



※線の太さ:帯域

[5] Z. Yao et. al., *On Superposition of Heterogeneous Edge Processes in Dynamic Random Graphs*, INFOCOM 2012(2012).

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

提案手法の詳細[2] ～結合振動モデルについて～

【解決したいこととアイディア】
各ノードの状態（位相）の時間推移を表現するが、本検討ではノード間のエッジ確立後もノードの消滅が確率的に発生することを勘案する必要がある。そこで、従来の結合振動モデル[6]に加え、ノードの消滅を表現する項を確率過程として付加し、個々の振動子の挙動を確率微分方程式で記述。

【提案手法の詳細】
ノードiの時刻tにおける位相を θ_i で表し以下の確率常微分方程式系で表現する：

$$\mathrm{d}\theta_j = \left\{\omega_j - K\sum_{l=1}^{M(t)} A_{jl}(t)\sin(\theta_j - \theta_l)\right\}\mathrm{d}t + K\sin\theta_j \mathrm{d}N_t$$

$$(l = 1, 2, \ldots, M(t))$$

ノードの
到着を勘案

ここで ω_j は各ノードjの固有振動数、$A_{jl}(t)$ はノードj, ノードl間の結合強度（リンクが無い場合は0）、$\mathrm{d}N_t$ は新規ノードの到着を示す。また$M(t)$は時刻tにおける系内数（生存ノード）を示す。

※）古典的な大域結合や複雑ネットワーク上で論じられてきた蔵本モデルでは、結合強度は時間非依存であること、また右辺第二項が存在しない点が提案モデルとの差分である。

[6] Kuramoto (1975)

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

提案手法の詳細[3] ～平均場近似～

位相の“同期度合い”を定量化するため、以下に示す「オーダーパラメータ」を導入し、平均場近似した系を導入する:

0≦R(t)≦1
R(t)が1に近いほど同期状態

$$R\exp(i\psi) = \frac{1}{k_{total}(t)} \sum_{j=1}^{M(t)} k_j(t)\exp(i\theta_j)$$

ここで k_j はノードjの次数。 更に、各ノードに接続するノードの消滅過程をポアソン過程で近似する。
これにより、元々の常微分方程式系は以下の様に平均場近似することができる:

$$\mathrm{d}\theta_j = \left\{\omega_j - Kk_jR\sin(\theta_j - \psi)\right\}\mathrm{d}t + K\sin\theta_j \mathrm{d}N_t$$

ノードの
到着を勘案

ノードjの到着時刻を τ とすると、上式において

$$k_j(t) = \sum_l A_{jl}(t),\ A_{jl}(t) = 1 - H(t - \mu_l(\tau))$$

ただし $\mu_l(\tau)$は時刻 τ におけるノードlの余命を表す確率変数。
これよりオーダーパラメータの時間発展をみることで、系全体の位相のばらつき(特に同期有無)を追跡できる。

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

【参考】提案手法の詳細[4] ～系内数∞の極限～

系内数が∞の場合を考えると、平均場近似の式から、時刻 τ に到着したノードの時刻t(≧ τ)における状態の確率密度関数を $\varrho(y,\omega,t;\tau)$ と表すと、これは以下に従う:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(y,\omega,t;\tau)+\frac{\partial}{\partial x}(a\varrho(y,\omega,t;\tau))$$
$$=p\lambda\left\{\frac{1}{K+1}\varrho\left(\frac{y}{K+1},\omega,t;\tau\right)-\varrho(y,\omega,t;\tau)\right\}$$

ノードの
到着を勘案

$$a=\omega-K\chi R\sin(y-\psi),$$

全体のノードの状態の確率密度関数の時間発展は以下の系を併せて考えることで表現できる:

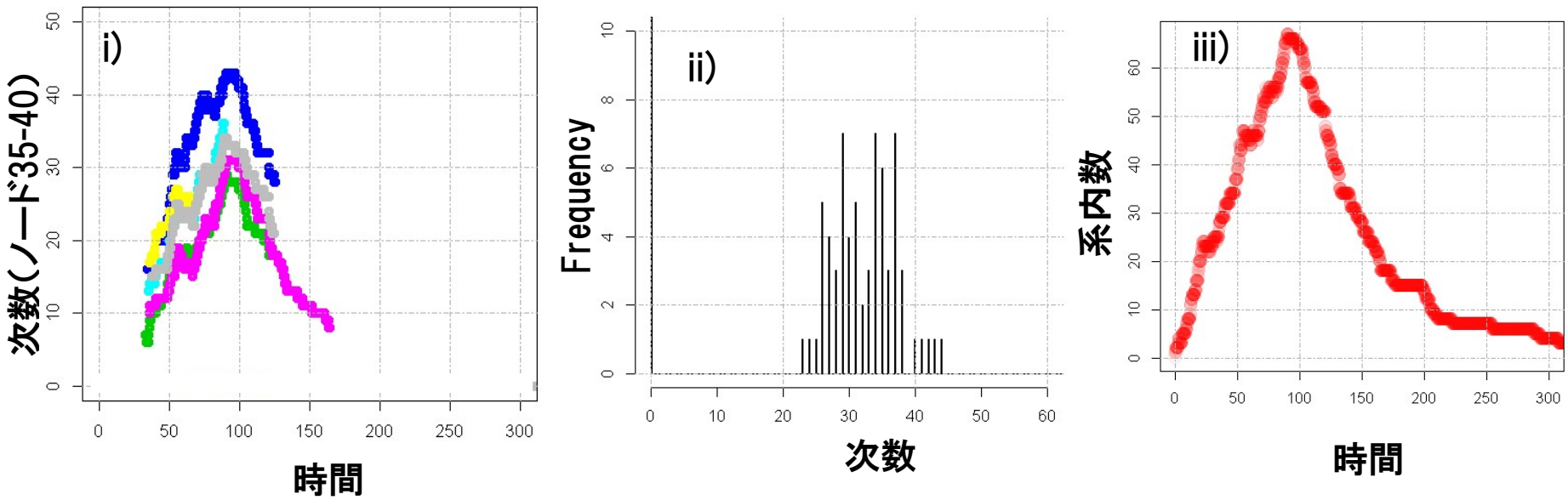
$$R\exp(i\psi)=\int\chi\exp(iy)\bar{\varrho}(y,\omega,t)g(\omega)f_\chi(\chi)\,\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\omega\mathrm{d}y,$$

$$\bar{\varrho}(y,\omega,t)=\int_0^t\varrho(y,\omega,t;\tau)f_\tau(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

シミュレーション例[1]

全参加ノード数100の場合において、到着番号が35-40の各ノードについて次数の時間推移を示す。
系内数はM/G/∞のそれに従う。



i) ノード35-40の次数推移, ii) 時刻t=90における次数の度数分布, iii) 生存ノード数の時間推移

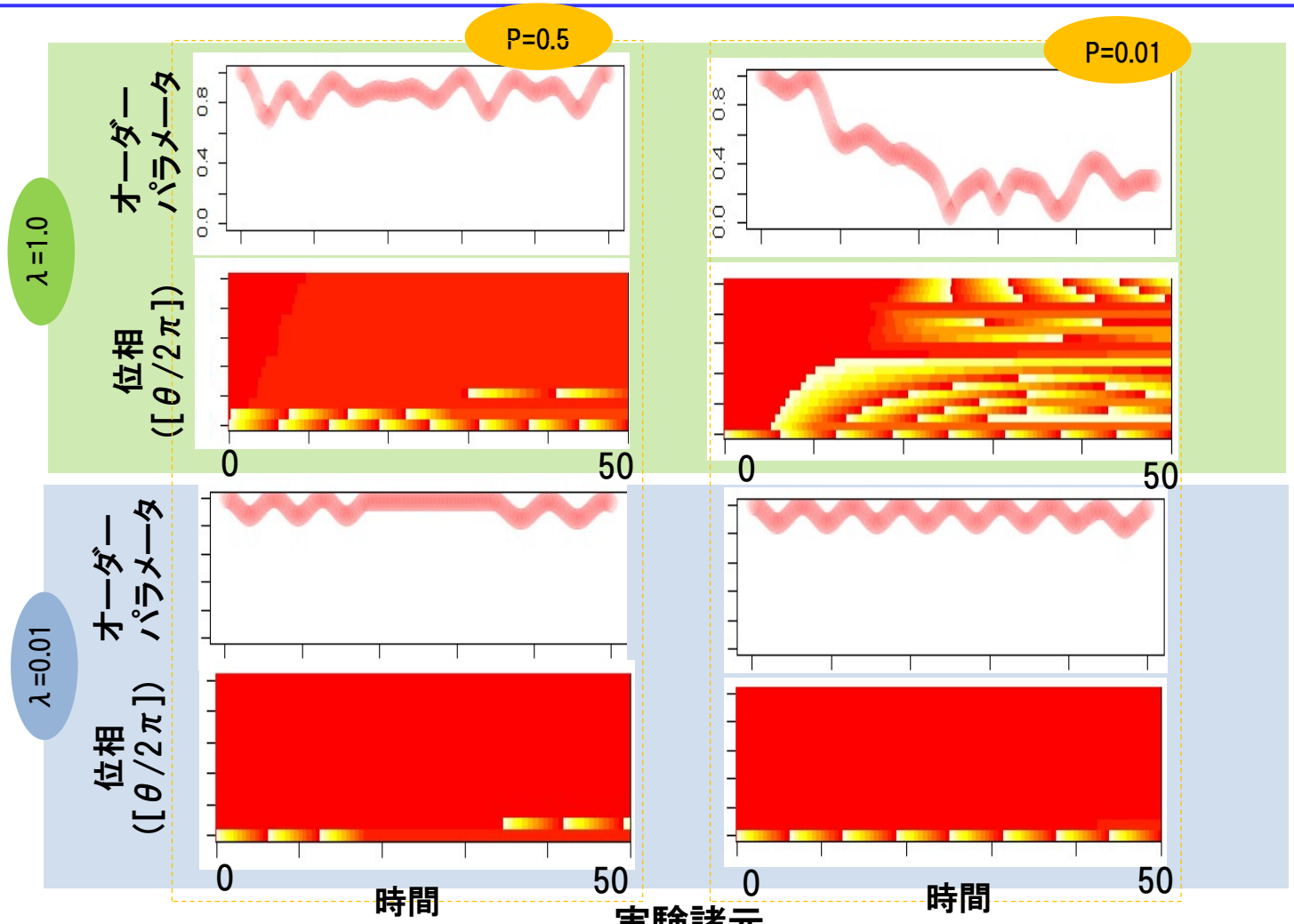
実験諸元

全ノード数	平均到着率	平均セッション持続時間	接続率p	結合強度
100	1	100	0.5	1

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

シミュレーション例[2]

数値計算結果の一例を下図に示す。オーダーパラメータの値が接続率pおよび到着率λの値に依存することが確認できる(同様に結合強度、生存時間分布にも依存)。

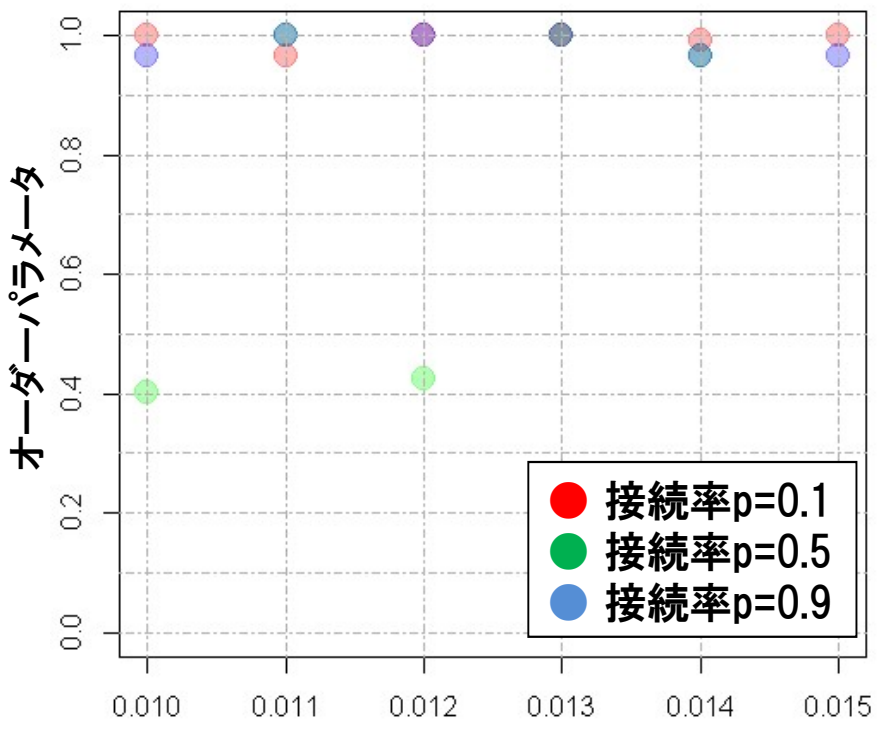


実験諸元

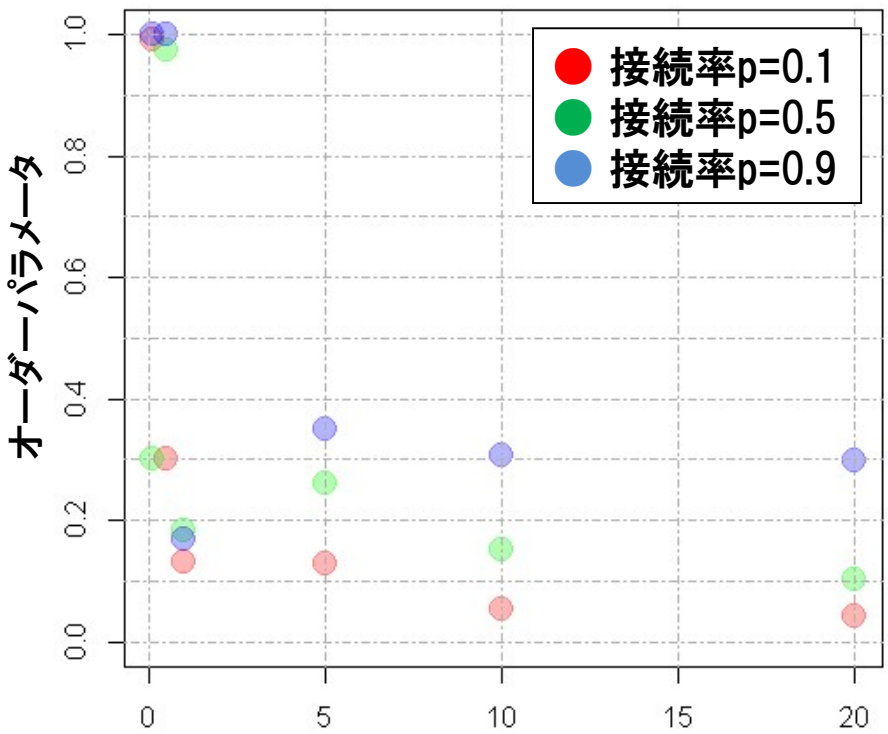
全ノード数	平均到着率(λ)	平均セッション持続時間	接続率(p)	結合強度(K)
15	1 / 0.01	100 (指数分布)	0.5/ 0.01	1

シミュレーション例[3]

時刻t=50におけるオーダーパラメータの値を、接続率、結合強度および平均到着率毎に比較する。
左下図より、平均到着率が低い場合にはほぼ高い同期状態を示すのに対し、
右下図より、結合強度が小さい場合には、平均到着率増大に伴い同期状態が低減する。



結合強度(平均到着率λ=0.1)
全ノード数:50



平均到着率λ(結合強度0.01)
全ノード数:50

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

摂動を受けた振動子の位相記述(2)

・平均場近似
・平均的な位相からのズレをψであらわす:

$$\psi = \phi - \omega t$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon \mathbf{U}^*(\omega t + \psi) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{X}_0(\omega t + \psi))$$
$$\equiv \epsilon \Omega(\omega t + \psi)$$

・ここで右辺はperiodic. またψは緩慢な変動のため近似的に以下の様にかける:

$$\frac{d\psi}{dt} = \epsilon\omega, \quad \omega = \frac{1}{T}\int_0^T \Omega(t)dt$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.

2振動子系の例

・性質の同じ2個の振動子が弱く相互作用している系：

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_1) + \delta\mathbf{F}_1(\mathbf{X}_1)\mathbf{V}_{12}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}_2) + \delta\mathbf{F}_2(\mathbf{X}_2)\mathbf{V}_{21}(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1)$$

ここで

$$\delta\mathbf{F}(\phi_1) \equiv \delta\mathbf{F}_1(\mathbf{X}_0(\phi_1))$$
$$\mathbf{V}_{12}(\phi_1, \phi_2) \equiv \mathbf{V}_{12}(\mathbf{X}_0(\phi_1), \mathbf{X}_0(\phi_2))$$

として先と同様に考えると

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega + \delta\mathbf{U}^*(\phi_1) \cdot \mathbf{F}_1(\phi_1) + \mathbf{V}_{12}(\phi_1, \phi_2)$$

Copyright © 2020 NTT corp. All rights reserved.

2振動子系の例

・先と同様に、新たな位相変数を導入：

$$\psi_i = \phi_i - \omega t \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \delta\omega_1 + \Gamma_{12}(\psi_1 - \psi_2)$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \delta\omega_2 + \Gamma_{21}(\psi_2 - \psi_1)$$

Copyright©2015 NTT corp. All Rights Reserved.