電子情報通信学会
第8回　情報ネットワーク科学研究会

Innovative R&D by NTT

動的ネットワークの ダイナミクスに関する一考察(2) ～ On some mathematical analysis of Kuramoto-Sakaguchi equation～

2015年5月22日

ネットワーク基盤技術研究所
通信トラヒック品質プロジェクト
本多泰理

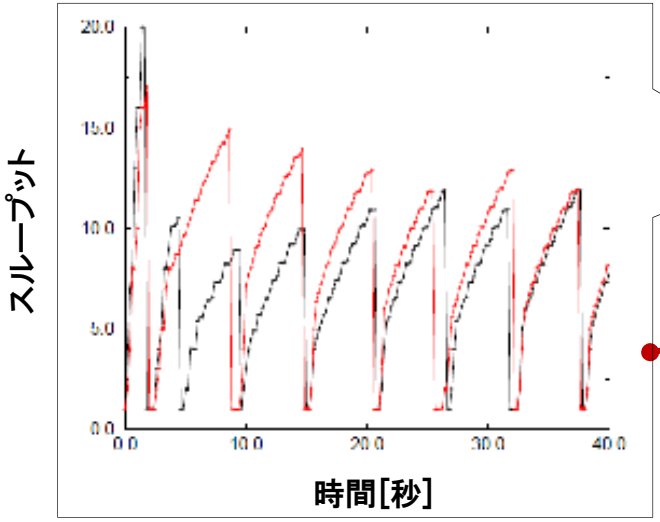
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

背景および課題認識

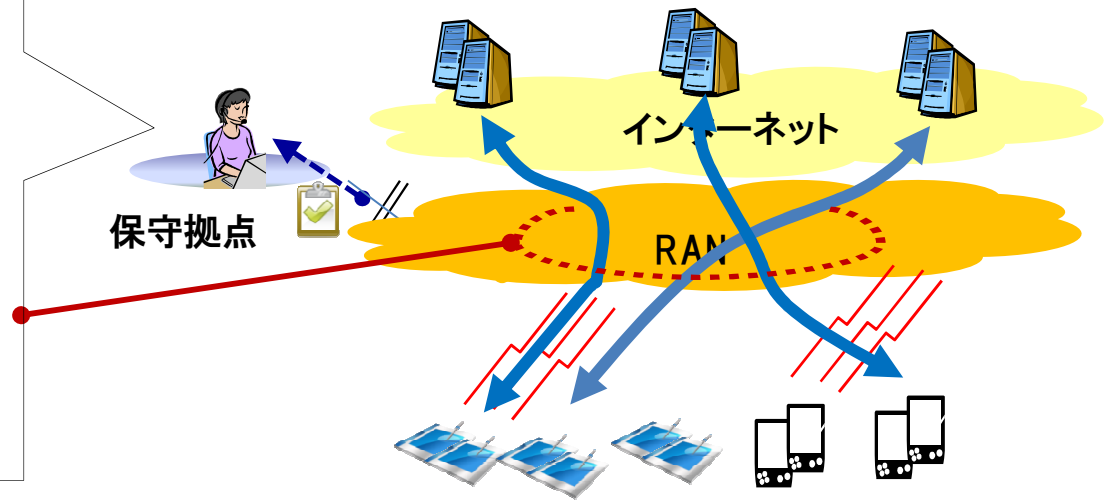
スマートフォンやタブレット端末の普及に伴い、頻繁な網への接続・切断が論理的トポロジーの時間変動を増幅し、網の設計・制御上看過できない状況である。
一方で、TCPレイヤにおいて、自律的制御により通信品質を確保する方式は様々存在するが、時として相互に影響を及ぼしあうことで同期し、結果的に全体の可用帯域を非効率化させてしまう問題※）も指摘されている。

簡易なNW観測に基づき，全体もしくは一部のセッションの同期有無を推定/予測できる技術を構築したい

※）TCPウィンドウ制御の機構が、網内でのパケットロス等を契機に複数端末間で同期する現象[1]



TCPレート同期の一例

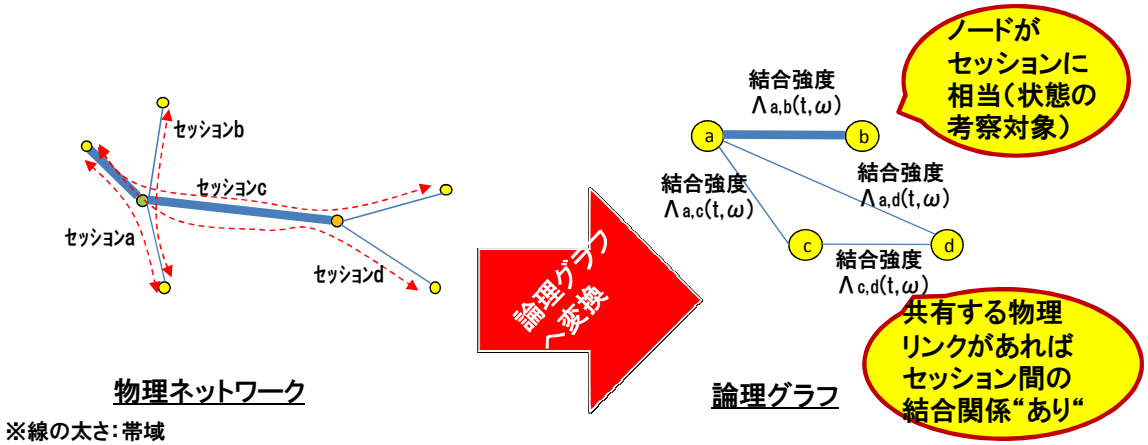


[1] H.Han, C. V. Hollot, D. Towsley, Y. Chait, Synchronization of TCP Flows in Networks with Small Drop Tail Buffers, CDC-ECC2005(2005).

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチと前回の到達点

TCPセッション間の依存関係を各セッションをノードとする重み付きグラフとして表現し，各時刻におけるセッションの状態(スループット)を位相とする結合振動子としてモデル化．Kuramoto modelに基づき，位相の分布の時間発展を表す新たな関数方程式モデルを提案．



$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(y,\omega,t;\tau)+\frac{\partial}{\partial x}(a\varrho(y,\omega,t;\tau))$$
$$=p\lambda\left\{\frac{1}{K+1}\varrho\left(\frac{y}{K+1},\omega,t;\tau\right)-\varrho(y,\omega,t;\tau)\right\}$$

$$a=\omega-K\chi R\sin(y-\psi),$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

残存課題

前回頂いたご指摘も含めて，下記の残存課題を認識.

今回は提案モデルの可解性を調べていく.

①	結合関数はsinで良いか？TCPスループットの表現に妥当な関数の選択が必要では.
②	提案モデルは解けるのか？
③	観測可能な情報からモデル中のパラメータをどのように同定するか？
	・・・

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

理論解の構成に向けて

(i) 下記関数方程式①の非定常解を求めるために，摂動法を用いる.
(ii)関数方程式①の非定常解を，Fourier級数を用いて構成する.

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(y,\omega,t;\tau)+\frac{\partial}{\partial x}(a\varrho(y,\omega,t;\tau))$$
$$=p\lambda\left\{\frac{1}{K+1}\varrho\left(\frac{y}{K+1},\omega,t;\tau\right)-\varrho(y,\omega,t;\tau)\right\}$$
$$a=\omega-K\chi R\sin(y-\psi), \qquad \cdots①$$

$$R\exp(i\psi)=\int \chi\exp(iy)\bar{\varrho}(y,\omega,t)g(\omega)f_\chi(\chi)\,\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\omega\mathrm{d}y,$$
$$\bar{\varrho}(y,\omega,t)=\int_0^t \varrho(y,\omega,t;\tau)f_\tau(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

理論解の構成に向けて(2)

下記関数方程式①を解く前に，その原型でより単純な形態であるKuramoto-Sakaguchi equationに対して同様の手法の適用を試み，適用可否を判断したい．
なお,当該方程式に対しては，現在までに時間大域的古典解の存在[1]が知られるのみである．

[1] Lavrentiev, M., M., et. al. Existence, Uniqueness, and Regularity for the Kuramoto-Sakaguchi Equation with unboundedly Supported Frequency Distribution, *Diff. Integ. Eq.* 27(2014), 879–892.

元のモデル（提案式①よりsimple）

$$\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \varrho^{(D)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(a^{(D)}\varrho^{(D)}\right),$$

$$a^{(D)} = \omega + Kr^{(D)}\sin(\psi - \theta),$$

$$r^{(D)}(t)\exp(i\psi(t)) = \int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \exp(i\theta)\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)g(\omega)\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\omega,$$

Kuramoto-Sakaguchi equation

$$\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial t} = \boxed{D\frac{\partial^2 \varrho^{(D)}}{\partial \theta^2}} - \omega\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial \theta} - K\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \sin(\phi-\theta)\varrho^{(D)}(\phi,\omega,t)g(\omega')\,\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\phi\right]$$

拡散係数D→0の時に同じ関数空間で解が存在することを示す．

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

課題

昨年発表されたLavrentievらによる結果[1]では，アプリオリ評価において未知変数の無限領域上での可積分性を要求していること，またFubiniの定理の適用可能性に疑問が存在.

⇒　ωについては重み付きの積分可能な空間で、解の再構成から議論を始める.

[1] Lavrentiev, M., M., et. al. Existence, Uniqueness, and Regularity for the Kuramoto-Sakaguchi Equation with unboundedly Supported Frequency Distribution, *Diff. Integ. Eq.* **27**(2014), 879–892.

Lavrentiev(2014)より(Theorem 3.1)

$$\boxed{\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho)^2\,d\omega\,d\theta}+\int_0^T\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}(\rho_\theta)^2\,d\omega\,d\theta\,dt\le M.$$

疑問①ωに関する可積分性

疑問②Fubiniの定理の適用可否

↓

ωについて重み付きの積分可能な空間で解を再構成

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

Formulation(非定常問題)

下記の関数方程式を考える:

$$
(1.1)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial \varrho}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2 \varrho}{\partial \theta^2} + \omega\dfrac{\partial \varrho}{\partial \theta} + K\dfrac{\partial}{\partial \theta}\left[\varrho(\theta,\omega,t)\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\omega' \int_0^{2\pi} \sin(\phi-\theta)\varrho(\phi,\omega',t)g(\omega')\mathrm{d}\phi\right] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\theta,\omega,t) \in (0,2\pi)\times\mathbf{R}\times(0,T), \\
\left.\dfrac{\partial^i \varrho}{\partial \theta^i}\right|_{\theta=0} = \left.\dfrac{\partial^i \varrho}{\partial \theta^i}\right|_{\theta=2\pi} \quad (i=0,1) \quad (\omega,t)\in\mathbf{R}\times(0,T), \\
\varrho\big|_{t=0} = \varrho_0(\theta,\omega) \quad (\theta,\omega)\in(0,2\pi)\times\mathbf{R}.
\end{cases}
$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

Function spaces （案）

位相θと時間tに関しては放物型のHolder空間，ωに関しては重み付きのL2空間とする：

$$|u|_{\Omega}^{(r+\alpha)} = \sum_{k\le r} |D^k u|_{\Omega} + [D^r u]_{\Omega}^{(\alpha)},$$

where

$$|u|_{\Omega} = \sup_{x\in\Omega} |u(x)|, \quad [u]_{\Omega}^{(\alpha)} = \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}.$$

By $C^{r+\alpha,\frac{r+\alpha}{2}}(\Omega_T)$ with $r = 0,1,2$, we mean the spaces of functions defined in Ω_T and having the finite norms

$$|u|_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} = |u|_{\Omega_T} + [u]_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} \quad (r=0),$$

where

$$|u|_{\Omega_T} = \sup_{(x,t)\in\Omega_T} |u(x,t)|, \quad [u]_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} = [u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + [u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2})},$$

$$[u]_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{x,y,t} \frac{|u(x,t)-u(y,t)|}{|x-y|^{\alpha}}, \quad [u]_{t,\Omega_T}^{(\frac{\alpha}{2})} = \sup_{x,y,t} \frac{|u(x,t)-u(x,\tau)|}{|t-\tau|^{\frac{\alpha}{2}}},$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

Function spaces （案）

and, for $r = 1$ and $r = 2$,

$$|u|_{\Omega_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})} = |u|_{\Omega_T} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + [u]_{t,\Omega_T}^{\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} \equiv |u|_{\Omega_T} + [u]_{\Omega_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})},$$

$$|u|_{\Omega_T}^{(2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2})} = |u|_{\Omega_T} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Omega_T} + \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}$$

$$\equiv |u|_{\Omega_T} + [u]_{\Omega_T}^{(2+\alpha,\frac{2+\alpha}{2})},$$

respectively. We also introduce a set of functions $L_2^{(\omega)}(\mathbf{R})$ with the finite norm

$$\|u\|^2_{L_2^{(\omega)}(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} e^{2|\omega|}|u(\omega)|^2 \, d\omega.$$

Then, we define a function space $\mathcal{V}_T^{i+l}$ $(i = 0, 1, 2)$ with $l \in (0, 1/2)$, a set of functions $u(\theta, \omega, t)$ defined on $(0, 2\pi) \times \mathbf{R} \times (0, T)$, whose norms are defined by

$$\|u\|_{\mathcal{V}_T^{i+l}} = \sup_{\omega} |u(\omega)|_{Q_T}^{(2+l,\frac{2+l}{2})} + \sum_{j=0}^{i} \left\| [u]_{Q_T}^{(j+l,\frac{j+l}{2})}(\omega) \right\|_{L_2^{(\omega)}(\mathbf{R})},$$

where $Q_T = (0, 2\pi) \times (0, T)$. Another space $\mathcal{V}_0^{i+l}$ $(i = 0, 1, 2)$ is a set of functions $u(\theta, \omega)$ defined on $(0, 2\pi) \times \mathbf{R}$, whose norms are defined by

$$\|u\|_{\mathcal{V}_0^{i+l}} = \sup_{\omega} |u(\omega)|_{(0,2\pi)}^{(2+l)} + \sum_{j=0}^{i} \left\| [D^j u]_{(0,2\pi)}^{(l)}(\omega) \right\|_{L_2^{(\omega)}(\mathbf{R})}.$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

粘性ゼロ極限の存在証明(gの台:有界)

Kuramoto-Sakaguchi equationに未知関数およびその時間/空間の導関数を乗じ，部分積分により拡散係数に依存しない解の有界性を導く。
コンパクト性の議論により，拡散係数のゼロ極限を持つ部分列を構成することができ，証明が完了すする.

$$\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial t} = D\frac{\partial^2 \varrho^{(D)}}{\partial \theta^2} - \omega\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial \theta} - K\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\sin(\phi-\theta)\varrho^{(D)}(\phi,\omega,t)g(\omega')\,\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\phi\right]$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_0^{2\pi}\left(\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)\right)^2\mathrm{d}\theta = D\int_0^{2\pi}\frac{\partial^2\varrho^{(D)}}{\partial\theta^2}\varrho^{(D)}\,\mathrm{d}\theta - \omega\int_0^{2\pi}\frac{\partial\varrho^{(D)}}{\partial\theta}\varrho^{(D)}\,\mathrm{d}\theta$$
$$- K\int_0^{2\pi}\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\varrho^{(D)}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\sin(\phi-\theta)\varrho^{(D)}(\phi,\omega,t)g(\omega')\,\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\varrho(\theta,\omega,t)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\mathbf{R}}g(\omega)\,\mathrm{d}\omega = 1,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|\varrho^{(D)}(\omega,t)\|^2_{L_2(0,2\pi)} + \left\|\frac{\partial\varrho^{(D)}}{\partial\theta}\right\|^2_{L_2(0,2\pi)} \le \frac{K}{2}\|\varrho^{(D)}(\omega,t)\|^2_{L_2(0,2\pi)},$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチ(1)

元の方程式に $\varrho^{(D)}$ を乗じることで，以下を示せる：

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varrho^{(D)}(\omega,t)\|^2_{L_2(Q)} + D\left\|\frac{\partial\varrho^{(D)}}{\partial\theta}(\omega,t)\right\|^2_{L_2(Q)}$$

(2.1)

$$= -K\int_0^{2\pi}\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\varrho^{(D)}(\theta,\omega',t)\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\sin(\phi-\theta)\varrho^{(D)}(\phi,\omega',t)g(\omega')\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\phi\right]\mathrm{d}\theta.$$

Applying the facts $\int_0^{2\pi}\varrho^{(D)}(\theta,\omega,t)\,\mathrm{d}\theta = 1$ and $\varrho^{(D)} \geq 0$ to (4.1), which are easily obtained, we have

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varrho^{(D)}(\omega,t)\|^2_{L_2(Q)} + D\left\|\frac{\partial\varrho^{(D)}}{\partial\theta}(\omega,t)\right\|^2_{L_2(Q)} \leq \frac{K}{2}\|\varrho^{(D)}(\omega,t)\|^2_{L_2(Q)}. \tag{2.2}$$

The Gronwall's lemma and taking the supremum with respect to t and ω then yields

$$\sup_{t,\omega}\|\varrho^{(D)}(\omega,t)\|_{L_2(Q)} \leq C_2,$$

where C_2 is a positive constant independent of D. Taking (4.2) into consideration again, we conclude that

- $\{\varrho^{(D)}\}$ belongs to a bounded set in $L_\infty(\mathbf{R}\times(0,T);L_2(Q))$;
- $\left\{\dfrac{\partial\varrho^{(D)}}{\partial\theta}\right\}$ belongs to a bounded set in $L_\infty(\mathbf{R};L_2(Q_T))$.

ght©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチ(2)

同様にして,元の方程式に $\frac{\partial^2 \varrho^{(D)}}{\partial \theta^2}$ を乗じることで, 以下を示せる:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial \theta}(\omega,t)\right\|^2_{L_2(Q)} + 2D\left\|\frac{\partial^2 \varrho^{(D)}}{\partial \theta^2}(\omega,t)\right\|^2_{L_2(Q)}$$

(2.3)

$$= K\int_0^{2\pi}\left(3\left|\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial \theta}\right|^2 + |\varrho^{(D)}|^2\right)\left(\int_0^{2\pi}\int_{\mathbf{R}}\cos(\phi-\theta)\varrho^{(D)}(\phi,\omega',t)g(\omega')\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\theta,$$

which, together in the similar calculations as before yield

- $\left\{\frac{\partial \varrho^{(D)}}{\partial \theta}\right\}$ belongs to a bounded set in $L_\infty(\mathbf{R}\times(0,T);L_2(Q))$;
- $\left\{\frac{\partial^2 \varrho^{(D)}}{\partial \theta^2}\right\}$ belongs to a bounded set in $L_\infty(\mathbf{R};L_2(Q_T))$.

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチ(3)

Thus, applying the Relich's lemma, there exists a subsequence $\{\varrho^{(D')}\}$, which satisfies $\varrho^{(D')} \to \varrho$ strongly in $L_\infty(\mathbf{R} \times (0,T); L_2(Q))$.

Iterating this procedure sufficient times and applying the Sobolev embedding theorem, we arrive at the statement that a certain subsequence $\{\varrho^{D''}\}$ converges to ϱ strongly in $L_\infty(\mathbf{R}; C^{2+l,\frac{2+l}{2}}(Q_T))$.

最後に，上記の関数列の収束先が一意であることを証明して，証明を完了（Cauchy列であることを示す）.

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

定常問題

最後に, D=0の場合における定常問題について考察する:

$$
(3.1) \qquad \begin{cases} \omega \dfrac{\partial \varrho}{\partial \theta} + K \dfrac{\partial}{\partial \theta} \left[\varrho(\theta, \omega) \displaystyle\int_{\mathbf{R}} \mathrm{d}\omega' \int_0^{2\pi} \sin(\phi - \theta) \varrho(\phi, \omega') g(\omega') \mathrm{d}\phi \right] = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\theta, \omega, t) \in (0, 2\pi) \times \mathbf{R} \times (0, T), \\ \left. \dfrac{\partial^i \varrho}{\partial \theta^i} \right|_{\theta=0} = \left. \dfrac{\partial^i \varrho}{\partial \theta^i} \right|_{\theta=2\pi} \quad (i = 0, 1) \quad \omega \in \mathbf{R}. \end{cases}
$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチ

Fourier級数の形式解を構成し,係数比較により係数を決定する.

形式解の構成

$$\varrho_\infty(\theta,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\omega)\exp(in\theta),$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial \theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(\omega) in \exp(in\theta), \quad \frac{\partial^2 \varrho}{\partial \theta^2} = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 a_n(\omega)\exp(in\theta),$$

$$\int_{\mathbf{R}} g(\omega')\mathrm{d}\omega' \int_0^{2\pi} \sin(\phi-\theta)\varrho(\phi,\omega')\,\mathrm{d}\phi = i\pi\Big(c_1\exp(i\theta) - c_{-1}\exp(-i\theta)\Big),$$

where $a_0 = 1/2\pi$ thanks to the restriction $\int_0^{2\pi}\varrho(\theta,\omega)\,\mathrm{d}\theta = 1\ \forall\omega\in\mathbf{R}$, and

$$c_1 =< a_1, g >\equiv \int_{\mathbf{R}} a_1(\omega')g(\omega')\,\mathrm{d}\omega', \quad c_{-1} =< a_{-1}, g >\equiv \int_{\mathbf{R}} a_1(\omega')g(\omega')\,\mathrm{d}\omega'.$$

$$\int_0^{2\pi}\varrho(\theta,\omega)\,\mathrm{d}\theta = 1, \quad \Rightarrow \quad a_0 = -\frac{1}{2\pi}.$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

アプローチ(2)

Note that if $a_1 \in \mathbf{R}$, then $c_1 = c_{-1}$ holds. Especially, if we take $a_1 = 1$, the following three term recurrence holds:

$$a_{n+1} = -\frac{i\omega}{\pi K} a_n + a_{n-1}. \tag{3.2}$$

This and $a_1 = 1$ imply

$$a_n = E_n\left(-\frac{i\omega}{\pi K}, -1\right),$$

where $E_n(x, \alpha)$ is the Dickson polynomial of the second kind of degree n, whose normal generating function is provided by

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_n(x, \alpha) z^n = \frac{1}{1 - xz + \alpha z^2}$$

within the convergence radius $|x| < 1$ and $|z| < 1$. Thus, within the region $\left|\frac{\omega}{\pi K}\right| < 1$, this solution is provided by

$$\varrho(\theta, \omega) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\pi K} e^{-i\theta} - e^{-2i\theta}} + \frac{1}{1 + \frac{i\omega}{\pi K} e^{i\theta} - e^{2i\theta}}.$$

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

まとめと今後の課題

Kuramoto-Sakaguchi equationについて，以下の知見を得た：
(1) 粘性ゼロ極限の解の存在
(2) 定常問題の非自明解の構成

今後の課題として，
(i)　提案している方程式への適用による,理論解の構成；
(ii)　結合強度Kや到着過程の強度λに依存した，解の安定性および分岐の解析

があげられる.

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

以下，参考資料
（前回発表資料）

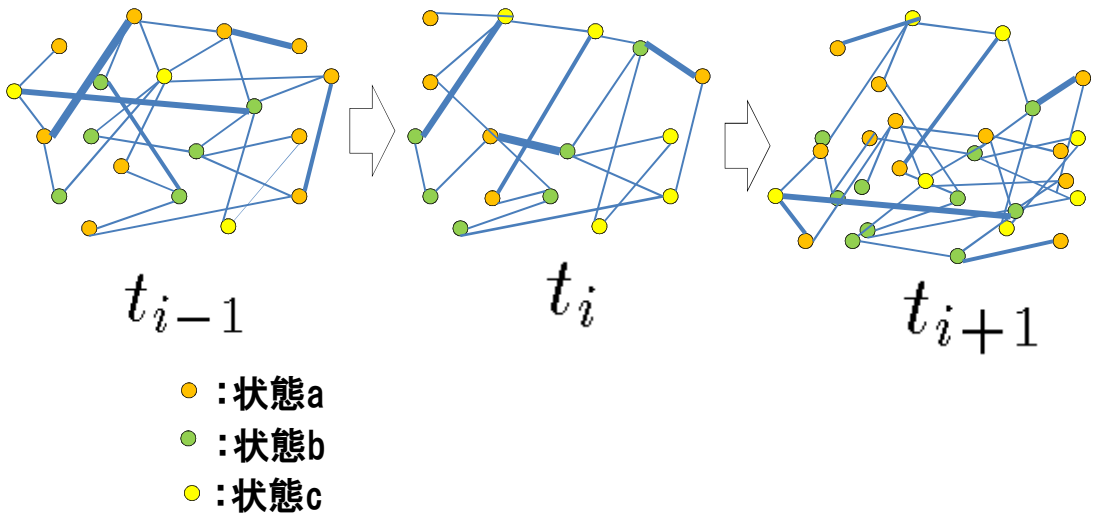
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

検討のアプローチ

モバイルネットワーク上での同期現象を記述するため、本検討では以下のアプローチを採用する:
① 論理的ネットワークを対象に、セッションの接続や消滅、セッション間の相互作用の有無や時間変動を勘案した抽象的モデル)を採用。特にセッションが多数存在する大規模なモデルを想定。

② 上記の上でノードの状態(例えばTCPスループットや輻輳ウィンドウサイズ)の結合振動モデルを構築し、ノード状態の時間発展を追跡可能なモデルを提案。

以上により、将来的に観測可能なパラメータから、全体としての網の効率利用を実現する設計・制御手法を検討できるようにする。



① 想定するネットワークモデル

$$\dot{\phi}_j(t) = \omega - c\sum_{\ell=1}^{N} L_{j\ell}\sin(\phi_j - \phi_\ell + \alpha)$$

$\phi_i(t)$:時刻tにおけるノードiの位相

② ネットワーク上の結合振動モデル

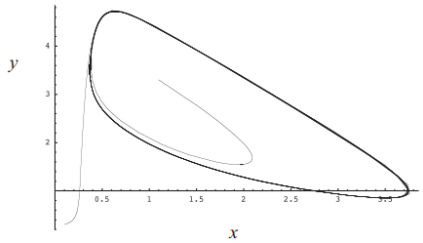
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

参考：結合振動子の同期

前回
発表資料

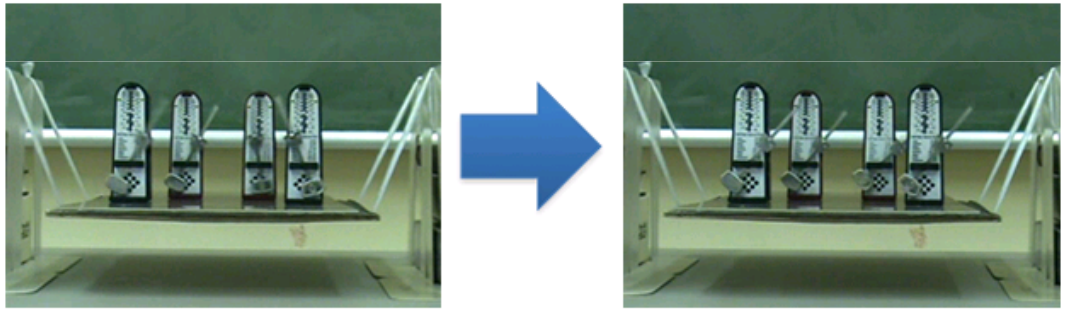
結合振動子の同期状態の例を以下に示す。

例1　化学反応(BZ反応)：　触媒濃度の振動現象



例2　振り子・メトロノーム：相互作用環境下での同期

例3　エレベータ：　昇降の同期



例4　交通流トラフィック同期

ネットワークでは。。
・2ノード間のTCPスループットの同期モデル[2]
・センサーネットワークにおける時刻同期[3]、
・TCP送信レート制御への応用[4]
などの既往検討が存在。

[2] H.Han, C. V. Hollot, D. Towsley, *Modelling Synchronization in TCP Networks Using Weakly-Coupled Oscillators*, INFOCOM 2007(2007).

[3] 山本他：「パルス結合振動子モデルにもとづく段階的同期によるネットワーク協調手法の提案と評価」電子情報通信学会技術研究報告. USN, 110(50), 17-20, (2010).

[4]蛯名 俊之介, 高野 知佐, 作元 雄輔, 会田 雅樹, ``結合振動子のカオスを利用した送信レート制御における隣接条件及びパラメタ設計,'' 電子情報通信学会 情報ネットワーク研究会, 信学技報 IN2012-199, vol. 112, no. 464, pp. 269-274, 2013

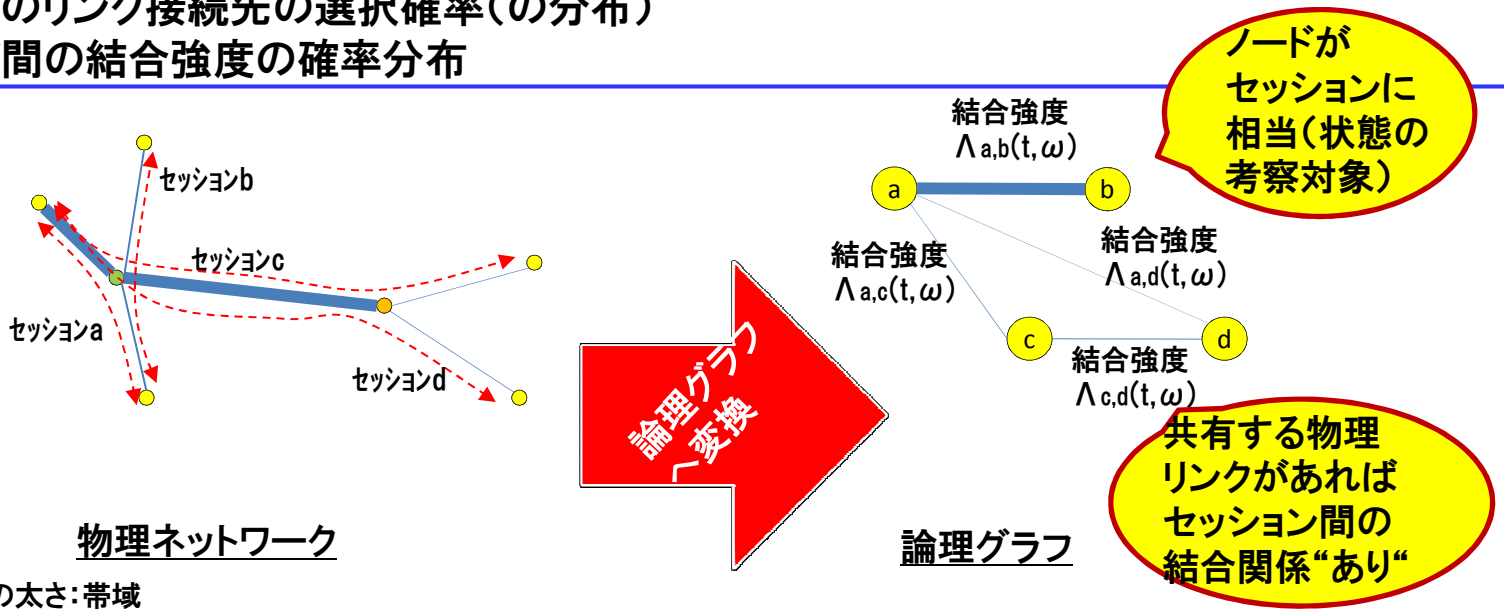
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

提案手法の詳細[1] ～ネットワークモデルについ

前回
発表資料

【解決したいこととアイディア】
本検討では、時間変動するネットワーク上で、各セッションの位相(TCPスループット等)を記述したい。
そこで、古典的ランダムグラフの概念に時間的概念を導入し(dynamic random graph[5])
かつグラフの各ノードにセッションをマッピングする手法を採用する。

【提案手法の詳細】
各ノード(すなわち物理的にいうセッション)は出生死滅過程に従い(出生はポアソン過程、持続時間は指数分布)、更に新規ノード出生時、当該時点で存在する他ノードとのリンクを接続率pで確立する。従って、当該モデルは以下をパラメータとする:
(i) 各ノードの出生・死滅過程
(ii) 各ノードのリンク接続先の選択確率(の分布)
(iii)各ノード間の結合強度の確率分布



※線の太さ:帯域

[5] Z. Yao et. al., *On Superposition of Heterogeneous Edge Processes in Dynamic Random Graphs*, INFOCOM 2012(2012).

NTT
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

提案手法の詳細[2] ～結合振動モデルについて～

前回
発表資料

【解決したいこととアイディア】
各ノードの状態(位相)の時間推移を表現するが、本検討ではノード間のエッジ確立後もノードの消滅が確率的に発生することを勘案する必要がある。そこで、従来の結合振動モデル[6]に加え、ノードの消滅を表現する項を確率過程として付加し、個々の振動子の挙動を確率微分方程式で記述。

【提案手法の詳細】
ノードiの時刻tにおける位相を θ_i で表し以下の確率常微分方程式系で表現する:

$$\mathrm{d}\theta_j = \left\{\omega_j - K\sum_{l=1}^{M(t)} A_{jl}(t)\sin(\theta_j - \theta_l)\right\}\mathrm{d}t + K\sin\theta_j \mathrm{d}N_t$$

$$(l = 1, 2, \ldots, M(t))$$

ノードの
到着を勘案

ここで ω_j は各ノードjの固有振動数、$A_{jl}(t)$ はノードj, ノードl間の結合強度(リンクが無い場合は0)、$\mathrm{d}N_t$ は新規ノードの到着を示す。また$M(t)$は時刻tにおける系内数(生存ノード)を示す。

※)古典的な大域結合や複雑ネットワーク上で論じられてきた蔵本モデルでは、結合強度は時間非依存であること、また右辺第二項が存在しない点が提案モデルとの差分である。

[6] Kuramoto (1975)

NTT

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

提案手法の詳細[3] ～平均場近似～

前回
発表資料

位相の“同期度合い”を定量化するため、以下に示す「オーダーパラメータ」を導入し、平均場近似した系を導入する：

0≦R(t)≦1
R(t)が1に近いほど同期状態

$$R\exp(i\psi) = \frac{1}{k_{total}(t)}\sum_{j=1}^{M(t)} k_j(t)\exp(i\theta_j)$$

ここで k_j はノードjの次数。 更に、各ノードに接続するノードの消滅過程をポアソン過程で近似する。
これにより、元々の常微分方程式系は以下の様に平均場近似することができる：

$$\mathrm{d}\theta_j = \left\{\omega_j - Kk_jR\sin(\theta_j - \psi)\right\}\mathrm{d}t + K\sin\theta_j\mathrm{d}N_t$$

ノードの
到着を勘案

ノードjの到着時刻を τ とすると、上式において

$$k_j(t) = \sum_l A_{jl}(t),\ A_{jl}(t) = 1 - H(t - \mu_l(\tau))$$

ただし $\mu_l(\tau)$ は時刻 τ におけるノードlの余命を表す確率変数。
これよりオーダーパラメータの時間発展をみることで、系全体の位相のばらつき（特に同期有無）を追跡できる。

NTT
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

【参考】提案手法の詳細[4] ～系内数∞の極限～

前回
発表資料

系内数が∞の場合を考えると、平均場近似の式から、時刻 τ に到着したノードの時刻t(≧ τ)における状態の確率密度関数を$\varrho(y,\omega,t;\tau)$ と表すと、これは以下に従う:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}(y,\omega,t;\tau)+\frac{\partial}{\partial x}(a\varrho(y,\omega,t;\tau))$$
$$=p\lambda\left\{\frac{1}{K+1}\varrho\left(\frac{y}{K+1},\omega,t;\tau\right)-\varrho(y,\omega,t;\tau)\right\}$$

ノードの
到着を勘案

$$a=\omega-K\chi R\sin(y-\psi),$$

全体のノードの状態の確率密度関数の時間発展は以下の系を併せて考えることで表現できる:

$$R\exp(i\psi)=\int\chi\exp(iy)\bar{\varrho}(y,\omega,t)g(\omega)f_\chi(\chi)\,\mathrm{d}\chi\mathrm{d}\omega\mathrm{d}y,$$

$$\bar{\varrho}(y,\omega,t)=\int_0^t\varrho(y,\omega,t;\tau)f_\tau(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

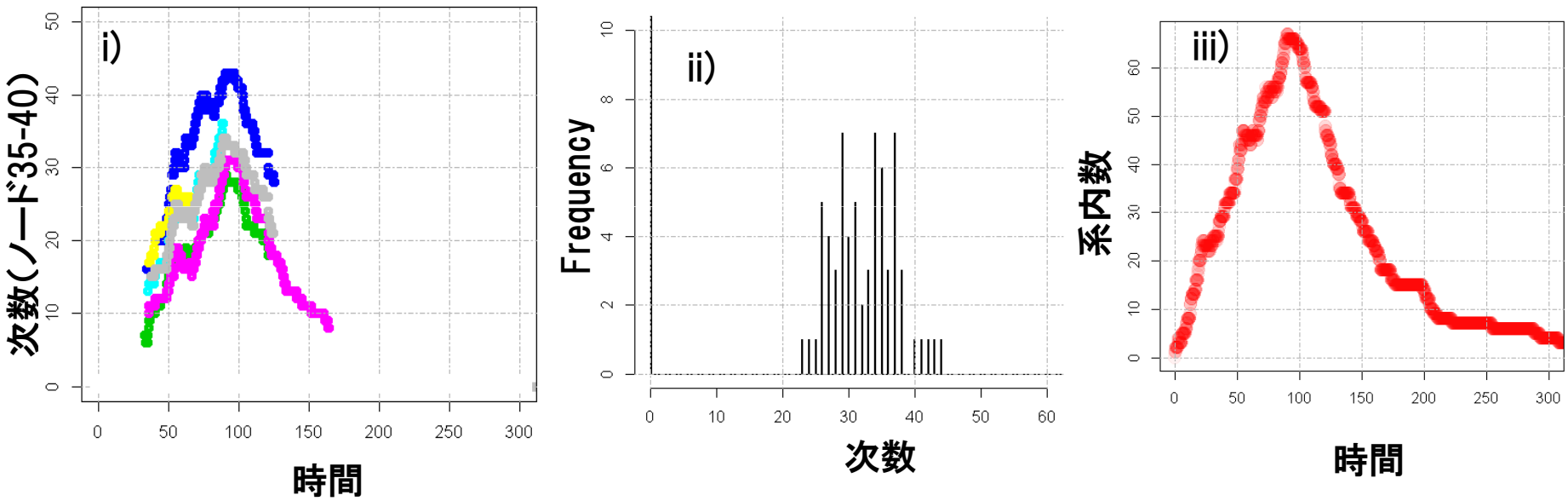
NTT

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

シミュレーション例[1]

前回
発表資料

全参加ノード数100の場合において、到着番号が35-40の各ノードについて次数の時間推移を示す。
系内数はM/G/∞のそれに従う。



i) ノード35-40の次数推移, ii) 時刻t=90における次数の度数分布, iii) 生存ノード数の時間推移

実験諸元

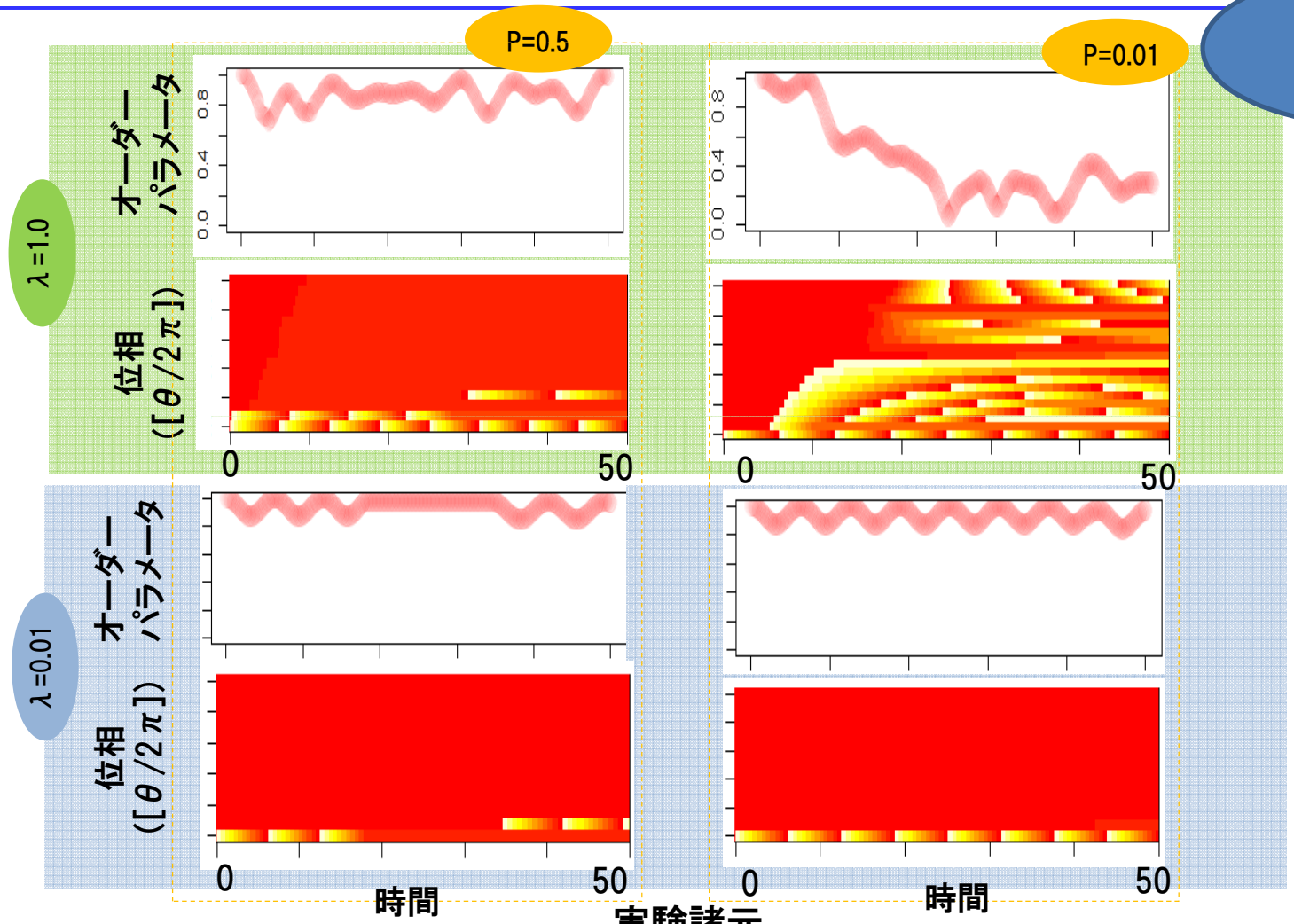
全ノード数	平均到着率	平均セッション持続時間	接続率p	結合強度
100	1	100	0.5	1

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

シミュレーション例[2]

数値計算結果の一例を下図に示す。オーダーパラメータの値が接続率pおよび到着率λの値に依存することが確認できる(同様に結合強度、生存時間分布にも依存)。

前回
発表資料



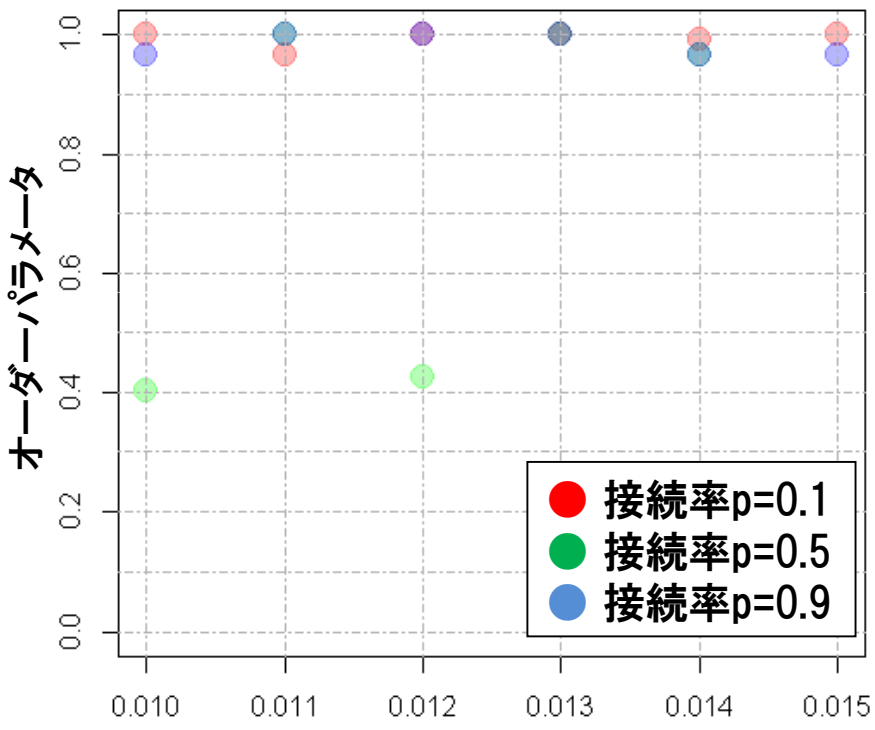
実験諸元

全ノード数	平均到着率(λ)	平均セッション持続時間	接続率(p)	結合強度(K)
15	1 / 0.01	100 (指数分布)	0.5/ 0.01	1

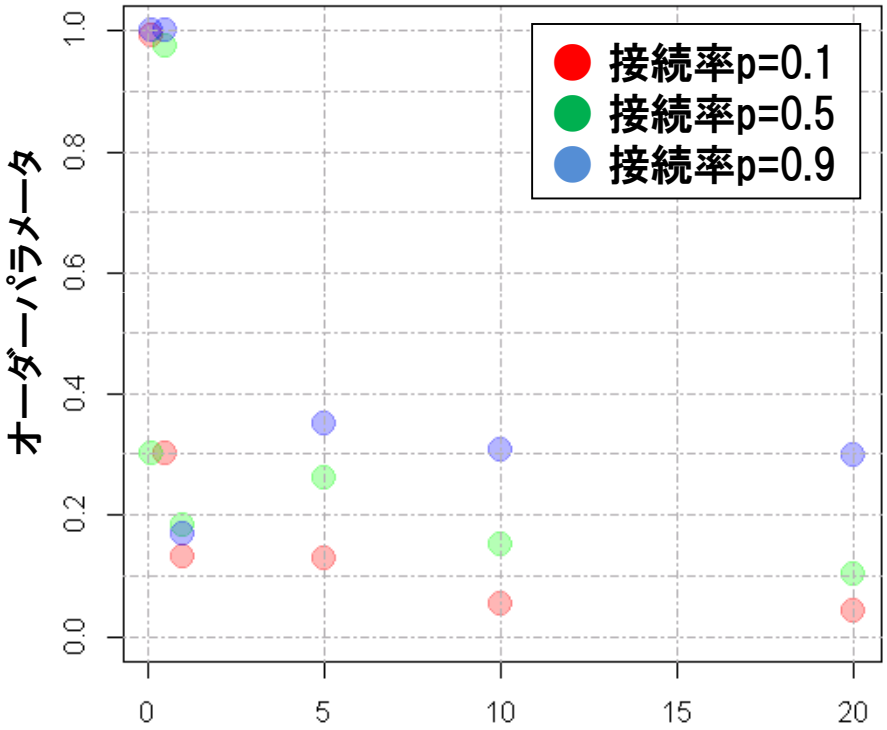
シミュレーション例[3]

前回
発表資料

時刻t=50におけるオーダーパラメータの値を、接続率、結合強度および平均到着率毎に比較する。
左下図より、平均到着率が低い場合にはほぼ高い同期状態を示すのに対し、
右下図より、結合強度が小さい場合には、平均到着率増大に伴い同期状態が低減する。



結合強度(平均到着率 λ=0.1)
全ノード数:50



平均到着率 λ(結合強度0.01)
全ノード数:50

Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.

まとめと今後の課題

前回
発表資料

動的ネットワークモデルおよびその上での結合振動子モデルを提案し、理論的な解析を実現する定式化を行った。

数値計算による提案モデルの可視化と検証を行い到着率、接続率が結合振動状態の形成に関わることを認めた（同様に生存時間分布、結合強度への依存性も別途示す）。

今後の課題として
■ 結合振動状態への移行を決定付ける各パラメータ領域の模索
■ 系内数無限大の場合における位相の確率密度関数の時間発展を記述した偏微分方程式による非同期および同期状態の解の線形/非線形安定性
■ 提案した定式化における理論解の構成
■ NW制御への応用上の目的関数の設定
■ 観測可能な情報に基づくパラメータ同定手法の検討
を考えている。

NTT
Copyright©2014 NTT corp. All Rights Reserved.