

2013年11月22日 第6回情報ネットワーク科学研究会

相互依存ネットワークの 次数相関の影響

東京工業大学総合理工学研究科
渡辺駿介, 樺島祥介

本研究の大まかな特徴

相互依存ネットワークというモデルの耐性解析を行った。

その際に、ネットワーク内、ネットワーク間の両方に次数相関（次数-次数相関）が入るようなモデルに対して、解析手法を提案した。

手法として、Cavity法というスピングラス理論において発展してきた理論を使った。

参照論文

Cavity-based robustness analysis of interdependent networks: Influence of intra- and internetwork degree-degree correlations, S. Watanabe and Y. Kabashima, arXiv:1308.1210v1

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

2

発表資料の流れ

序

- ・ 相互依存ネットワーク
- ・ カスケード現象
- ・ 次数相関

本論

解析（シングルネットワーク）

- ・ キャビティ法による解析評価（ミクروسコピック）
- ・ キャビティ法による解析評価（マクروسコピック）
- ・ 生成関数法との比較

解析（相互依存ネットワーク）

数値実験

- ・ 実験の概要

結果

- ・ GCの大きさに関する図
- ・ 転移点の変化に関する図

総括

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

3

相互依存ネットワーク

動機

Ref: http://en.wikipedia.org/wiki/Interdependent_networks

現実世界のネットワークは単一で存在しているわけではない、一つ一つのネットワークがより大きなシステムの要素も兼ねており、各ネットワーク間に自明ではない相互作用が存在するものとして考えられる。

サイトの一部に故障が生じた場合、ネットワーク間の相互作用が存在する為に、故障が部分から全体へと拡大してしまう事態も考えられる。

ネットワークの耐性を考えたとき、単一ネットワークにおいて見積もられる耐性は過大評価である可能性がある。

相互依存ネットワークで表される事例

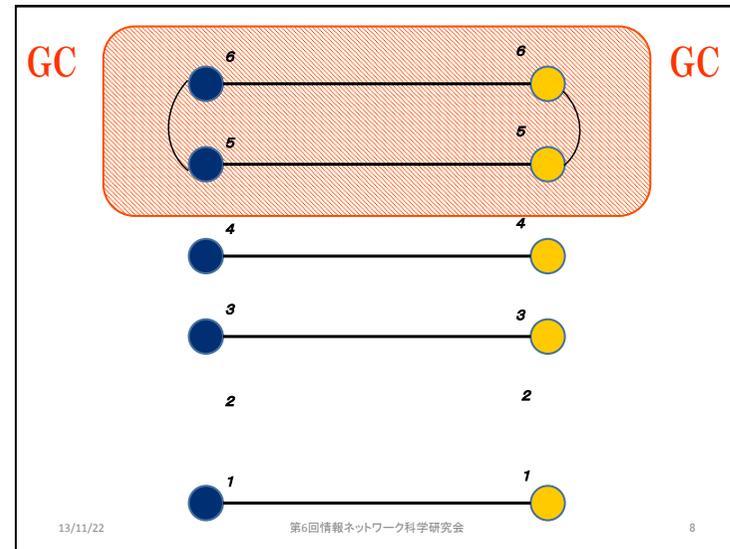
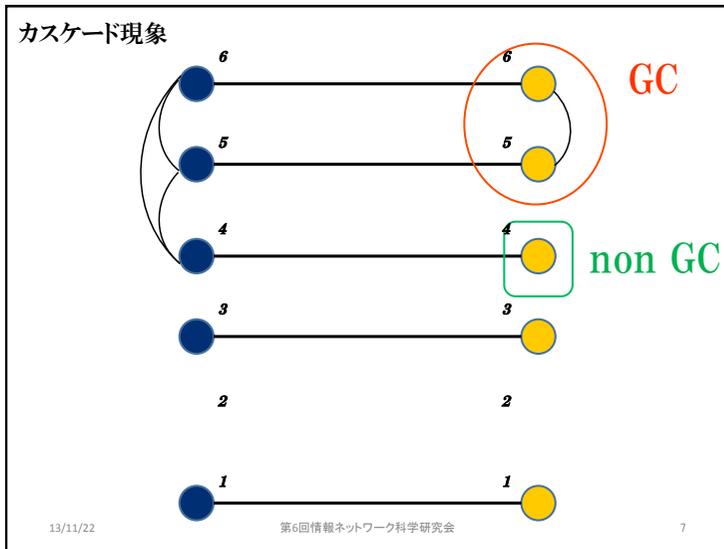
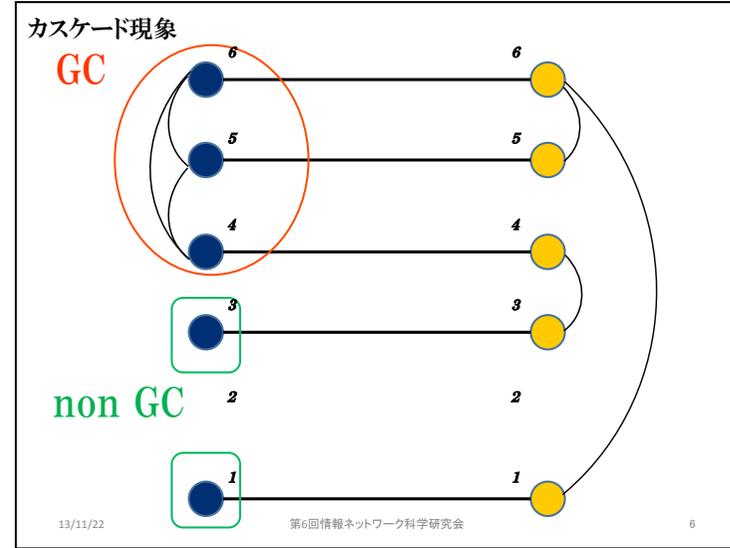
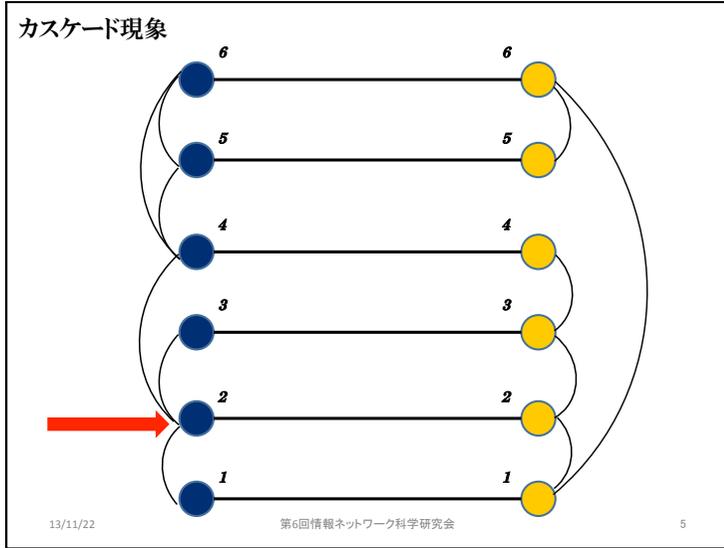
- | | |
|--------------|-----------------------------------|
| ・ インフラネットワーク | 電力ネットワークとコミュニケーションネットワーク |
| ・ 輸送ネットワーク | 港（空）ネットワークと港（海）ネットワーク |
| ・ 経済ネットワーク | 銀行ネットワークにおける預金利用性と商会ネットワークによる経済生産 |

GC (giant component)

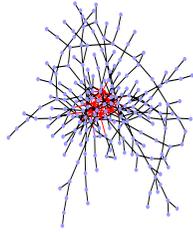
生存しているかつ互いに結合している部分集合のなかで最大のもの(耐性評価のための指標になる。)

第6回情報ネットワーク科学研究会

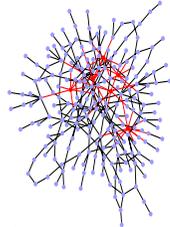
4



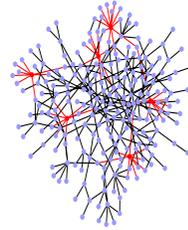
次数相関



正の相関
高い次数のサイトとつながりやすいのは、高い次数のサイトである。



中立
サイト同士が結びつく確率はランダムである。



負の相関
高次のサイトは低い次数のサイトとつながりやすい。

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

9

Ref. Albert-László Barabási, 'Network Science'

次数相関に関して導入するマクロな特徴量

1本のボンドをランダムに選択したとき、片方のサイトの次数がkであるような確率

$$r(k) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)} = \frac{kp(k)}{\langle k \rangle}, \quad (1)$$

1本のボンドをランダムに選択したとき、片方のサイトの次数がl、もう片方のサイトの次数がkであるような確率。

$$\sum_l r(k, l) = r(k) = \frac{kp(k)}{\sum_l lp(l)}, \quad (2)$$

1本のボンドをランダムに選択し、かつ、片方のサイトの次数がlであったとき、もう片方のサイトの次数がkであるような確率。

$$r(k|l) = \frac{r(k, l)}{r(l)} = \frac{\langle k \rangle r(k, l)}{lp(l)}. \quad (3)$$

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

10

解析評価(ミクروسコピック)

• バイナリ変数の定義

サイトが生存しているか 1 $s_i \in \{0, 1\}$
故障しているか 0

サイトがGCに含まれるか 0 $\sigma_i \in \{0, 1\}$ ※0, 1は交換不可
含まれないか 1

• 個々のサイトに関しては3つの状態が考えられる。

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| | $s_i = 1, \sigma_i = 0$ |
| 1. 生存しているかつGCに含まれる。 | $s_i = 1, \sigma_i = 1$ |
| 2. 生存しているがGCに含まれない | $s_i = 0, \sigma_i = 1$ |
| 3. 故障している。 | |

個々のサイトの生存/故障の状態はミクロで考えているときは、前もって与えられる。このとき、生存してかつGCに含まれるサイトの個数(または全体に対する割合)を求めたい。

具体的には、あるサイトが、生存していてかつ接続している周りのサイトが一つでもGCに含まれている状態のものの個数を求めたい。

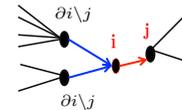
13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

11

メッセージの計算(ミクروسコピック)

メッセージ 0のときGC 1のときGCでない
(サイトが、"その時点で"自分自身がGCに含まれるか否かを隣に伝える)



$$m_{i \rightarrow j} = \prod_{h \in \partial i \setminus j} (1 - s_h + s_h m_{h \rightarrow i}). \quad (14)$$

$s_h = 0$ h は故障している。自動的にメッセージは1

$s_h = 1$ h は生存している。このとき、その時点で孤立していれば、メッセージは1。GCに含まれていればメッセージは0となる。

GCに含まれるか否かの情報は、本来はグラフ全体を見る必要がある。しかし、グラフが局所的にツリーと見なせる場合は、サイトをひとつ取り除けば(除いて出来る空孔のことをキャビティという。)グラフは個々のサブグラフに分断される。

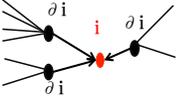
この仮定のもとでは、GCに関する情報も各サブグラフで独立に計算ができ、とりのぞいたサイトを元に戻す事で、情報はグラフ全体に伝えられる。

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

12

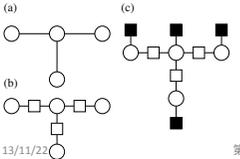
σの計算式
(サイト*i*に入ってくる全てのメッセージで計算される)

$$\sigma_i = \prod_{j \in \partial i} (1 - s_j + s_j m_{j \rightarrow i}). \quad (13)$$


GCの大きさ
生存しているかつGCに含まれるサイトの割合

$$S = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i (1 - \sigma_i). \quad (12)$$

二部グラフでスマートに表現する事も出来る.



(a) 白丸 元のグラフにおけるサイト
(b) 白四角 ボンド上で定義されるメッセージを送る役割の関数サイト,
(c) 黒四角 サイト上で定義される生存状態を表す関数サイト.

13/11/22 第6回情報ネットワーク科学研究会 13

解析評価(マクロスコピック)

ミクロスコピックの状況では、個々のサイトの生存状態が決定的に与えられていたため、GCに含まれるか否かも決定的に求める事ができた。

しかし、サイトの生存状態が確率的である場合は、GCに含まれるか否かについても確率的な情報になる。

そこで、サイトの生存確率がその次数によって一意に決定されるような状況を考え、そのときのネットワークにおけるGCの大きさの期待値を導出する事にする。

q_k 次数*k* のサイトの生存確率、予め与えられる

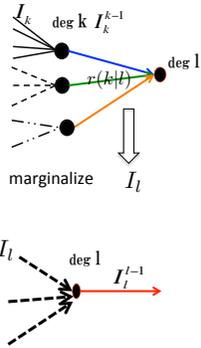
I_l 次数*l* のサイトに入力されるメッセージが1である(GCではないという情報が入ってくる)確率

13/11/22 第6回情報ネットワーク科学研究会 14

解析評価(マクロスコピック)

サイトを一つ取り除いたとき、ボンド上を流れるメッセージの期待値を、次数相関を考慮して考える。

今、キャビティのサイトの次数が*l*だったとすると、入力メッセージの期待値は

$$I_l = \sum_k r(k|l) (1 - q_k + q_k I_k^{k-1}). \quad (18)$$


marginalize I_l

GCの大きさの期待値は次のように計算される。

$$\mu = \sum_l p(l) q_l (1 - I_l^l), \quad (19)$$

13/11/22 第6回情報ネットワーク科学研究会 15

解析評価(生成関数法との比較)

Cavity法におけるマクロなメッセージの計算式

$$\sum_l r(l) I^{l-1} = \sum_l r(l) \left(1 - q + q \sum_k r(k) I^{k-1} \right)^{l-1} \quad (24) \quad \mu = \sum_l p(l) q_l (1 - I_l^l), \quad (19)$$

生成関数法

$$G(x) = \sum_k p(k) x^k, \quad (26)$$

$$H(x) = \sum_k r(k) x^{k-1} = \frac{G'(x)}{G'(1)}, \quad (27)$$

セルフコンシステントな等式

$$f = H(1 - q + qf), \quad (25)$$

$$\mu = q(1 - G(1 - q + qf)). \quad (28)$$

$f \equiv \sum_k r(k) I^{k-1} = H(I)$

次数相関が無い場合において明確な対応関係が確認できた。
次数相関がある場合においても、おそらく対応している。

13/11/22 第6回情報ネットワーク科学研究会 16

解析評価(相互依存ネットワーク)

シングルネットワークとの違い

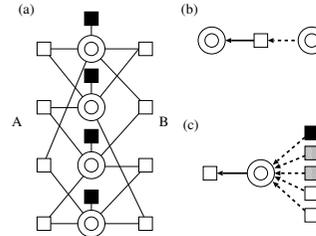
結論から言えば、ネットワークAにおいてもネットワークBにおいてもGCに含まれるサイトが、最終的に孤立していない、すなわち“共通のGC”に含まれる。

パーコレーション過程は各ネットワークにおいて交互に行われるため、その都度サイトがGCに含まれるか否かを計算する。

ネットワーク内におけるメッセージの意味合いはシングルネットワークのときと変わらない。

しかし、ネットワーク間におけるメッセージは、直前のステップにおいて、サイトがGCに含まれるか否かの情報である。これはシングルネットワークにおいて、予め与えられていた生存情報の代替と考えられる。

解析評価(相互依存ネットワーク, ミクロスコピック)



$$M_{a \rightarrow i}^A = M_{j \rightarrow a}^A \quad (\partial_A a = \{i, j\}), \quad (30)$$

$$M_{i \rightarrow a}^A = 1 - r_{A,i}^{2t-1} + r_{A,i}^{2t-1} \prod_{b \in \partial_A i \setminus a} M_{b \rightarrow i}^A, \quad (31)$$

$$\sigma_{A,i}^{2t-1} = \prod_{a \in \partial_A i} M_{a \rightarrow i}^A, \quad (32)$$

$$M_{a \rightarrow i}^B = M_{j \rightarrow a}^B \quad (\partial_B a = \{i, j\}), \quad (33)$$

$$M_{i \rightarrow a}^B = 1 - r_{B,i}^{2t} + r_{B,i}^{2t} \prod_{b \in \partial_B i \setminus a} M_{b \rightarrow i}^B, \quad (34)$$

二重丸 サイトペア

$$\sigma_{B,i}^{2t} = \prod_{a \in \partial_B i} M_{a \rightarrow i}^B, \quad (35)$$

黒四角 サイトペアに関する生存ノード

GC

白四角
灰色四角
各ネットワーク内における サイト間の interactionに関するノード

$$S^{2t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i (1 - \sigma_{A,i}^{2t-1}) (1 - \sigma_{B,i}^{2t}). \quad (29)$$

解析評価(相互依存ネットワーク, マクロスコピック)

2t-1ステップにおけるネットワークA におけるメッセージの式 及び GCの評価式

$$I_{A,l_B}^A = \sum_{k_A, k_B} r_A(k_A, k_B | l_A, l_B) \times \left(1 - q_{A,k_A k_B}^{2t-1} + q_{A,k_A k_B}^{2t-1} (I_{A,k_A k_B}^A)^{k_A-1} \right). \quad (36)$$

$$q_{B,l_A l_B}^{2t} = q_{A,l_B} \left(1 - (I_{A,l_B}^A)^{l_B} \right), \quad (37)$$

2tステップにおけるネットワークB におけるメッセージの式 及び GCの評価式

$$I_{A,l_B}^B = \sum_{k_A, k_B} r_B(k_A, k_B | l_A, l_B) \times \left(1 - q_{B,k_A k_B}^{2t} + q_{B,k_A k_B}^{2t} (I_{A,k_A k_B}^B)^{k_B-1} \right). \quad (38)$$

$$q_{A,l_A l_B}^{2t+1} = q_{A,l_B} \left(1 - (I_{A,l_B}^B)^{l_B} \right). \quad (39)$$

最終ステップにおける全体グラフにおける“共通のGC”の評価式

$$\mu^{2t} = \sum_{l_A, l_B} P(l_A, l_B) q_{A,l_B} \left(1 - (I_{A,l_B}^A)^{l_B} \right) \times \left(1 - (I_{A,l_B}^B)^{l_B} \right) = \sum_{l_A, l_B} P(l_A, l_B) (q_{A,l_B})^{-1} q_{A,l_A l_B}^{2t-1} q_{B,l_A l_B}^{2t}. \quad (40)$$

※(40)に至る前に、各メッセージのステップ間における変化量が十分小さくなるまで、(36)~(39)の反復計算を繰り返す必要がある。

解析評価(相互依存ネットワーク, マクロスコピック)

A

$$I_{A,l_B}^A = \sum_{k_A, k_B} r_A(k_A, k_B | l_A, l_B) \times \left(1 - q_{A,k_A k_B}^{2t-1} + q_{A,k_A k_B}^{2t-1} (I_{A,k_A k_B}^A)^{k_A-1} \right). \quad (36)$$

B

$$I_{A,l_B}^B = \sum_{k_A, k_B} r_B(k_A, k_B | l_A, l_B) \times \left(1 - q_{B,k_A k_B}^{2t} + q_{B,k_A k_B}^{2t} (I_{A,k_A k_B}^B)^{k_B-1} \right). \quad (38)$$

$$q_{B,l_A l_B}^{2t} = q_{A,l_B} \left(1 - (I_{A,l_B}^A)^{l_B} \right), \quad (37)$$

$$q_{A,l_A l_B}^{2t+1} = q_{A,l_B} \left(1 - (I_{A,l_B}^B)^{l_B} \right). \quad (39)$$

$$I_{A,l_B}^A = 1 \quad q_{B,l_A l_B}^{2t} = 0 \quad \text{などの解は常に安定であることが分かる。}$$

これより $\mu^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \mu^{2t} = 0$ は常に局所安定である。

次数相関を考慮した場合についても、転移が不連続（一次）相転移であることもこの事から分かる。

数値実験

1. ランダム2ピークネットワーク（次数4, 50%, 次数6, 50%, 全サイト数10000）を2つ用意する。このモデルに対してピアソン係数を設定すると、次数間の接続確率がユニークに定まる。ボンドの再接続によって次数相関（ネットワーク内）を与える。ネットワーク間の次数相関に関しては片方のネットワークのサイトインデックスを入れ替える事によって与える。
2. ランダム除去（サイトの生存確率が、次数によらず一定、ターゲットアタック（全体の生存確率が50%以下の場合、次数6のみ故障。一方で全体の生存確率が50%以上の場合、次数6のサイトは全て故障、残りに関して、次数4のサイトを故障させる）どちらにおいても、個別のサイトに対して確率的に生存ラベルを割り振り、GCの判定プログラムによって、GCを求める。両方のコンポーネントの割り振りが一致するまで、ボンド破壊を反復的に繰り返す。
3. 最終的な共通のGCの大きさを求めることを条件ごとに50回ほど繰り返し、期待値とする。

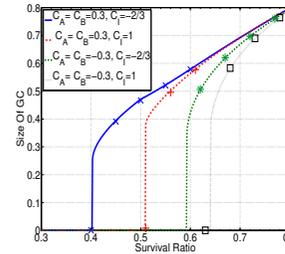
13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

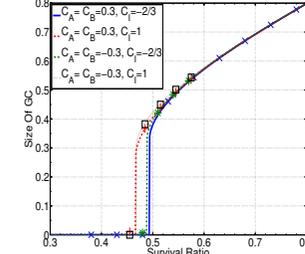
21

結果

ターゲットアタック



ランダム除去



1次相転移がどちらも確認される。解析結果（各線）と数値実験（各マーカー）が高い精度で一致していることが確認される。

※転移点は左にいくほどロバスト

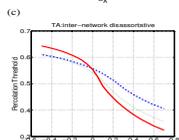
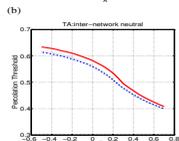
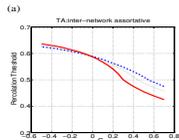
13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

22

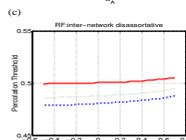
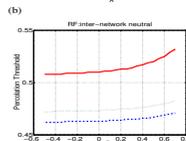
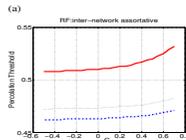
結果（スレッシュホルドのパラメータに対する変化）

ターゲットアタック



13/11/22

ランダム除去



第6回情報ネットワーク科学研究会

- 縦軸に転移点の値（生存率、下にいくほどロバスト）
 - 横軸にAにおける相関
 - 色別に
 - 赤, Bにおいて正相関
 - 緑, Bにおいて無相関
 - 青, Bにおいて負相関
 - 位置別に
 - 上, グラフ間 正相関
 - 中, グラフ間 無相関
 - 下, グラフ間 負相関
- ランダム除去の場合は、各相関パラメータを変化させても、転移点の変化はターゲットアタックに比べると小さい。

一方でターゲットアタックの場合は、相関によって差が見られる。

総括

- ネットワーク間、ネットワーク内に次数相関（degree-degree correlation）のある相互依存ネットワークにおいて、ランダム除去、ターゲットアタックを施したときのGCの大きさについてCavity法により解析的に評価し、その値が0になるところから転移点を見積もった。
- 上述した次数相関のある場合においても、転移が一次転移（不連続転移）であることが解析表現により確認した。
- 広く用いられる”generating function method”との対応を考えた。相関の無い場合においてGCの値に関して導出される結果はCavity法と等価であることがわかった。
- 2ピーク相互依存ネットワークにおける転移点を実験的に評価し、解析的に（間接的に）評価した転移点と比較した結果、良い精度で一致した。
- 2ピーク相互依存ネットワークにおけるランダムアタックの場合、次数相関の転移点に与える影響はあまり見受けられない。しかしターゲットアタックの場合、逆に顕著な影響が見られる。最もロバストな条件はネットワーク間でどちらも正の相関、ネットワーク間で負の相関、を持つ場合である。

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

24

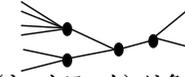
予備資料

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

25

パーコレーション(浸透)



要素同士の結びつきが重要な意味をもつシステム(ネットワーク)は多く存在するが、重要な性質の一つに**ロバスト性**がある。

要素が正常に機能しているかどうかをサイトの占有確率で置き換える。(要素間の機能に焦点を当てるときはボンドの占有確率を考える。)この占有確率を変化させてグラフにおけるクラスター(コンポーネント)を計測することで、**故障に対する耐性**を評価できる。これはグラフにおけるパーコレーション過程として現在までに非常に多くの研究がなされている。

歴史的には1957年にBroadbent とHammersleyが静的ランダム媒質を流れる液体の流れを解析するためにラティスマデルを導入したのが最初とされる。種々の故障、破壊に対して高いロバスト性を持つような要素の接続パターンは如何なるものかを追求する。

参考文献

S.R.Broadbent and J.M.Hammersley(1957) S.Kirkpatrick(1973) J.Hoshen and R.Kopelman(1976) D.S.Callaway,M.E.J.Newmann,S.H.Strogatz and D.J.Watts(2000) etc...

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

26

各種ネットワークにおけるピアソン係数

	network	n	r
real-world networks	physics coauthorship ^a	52 909	0.363
	biology coauthorship ^a	1 520 251	0.127
	mathematics coauthorship ^b	253 339	0.120
	film actor collaborations ^c	449 913	0.208
	company directors ^d	7 673	0.276
	Internet ^e	10 697	-0.189
real-world networks	World-Wide Web ^f	269 504	-0.065
	protein interactions ^g	2 115	-0.156
	neural network ^h	307	-0.163
	food web ⁱ	92	-0.276
models	random graph ^u		0
	Callaway <i>et al.</i> ^v		$\delta/(1 + 2\delta)$
	Barabási and Albert ^w		0

Ref. Assortative mixing in networks, M. E. J. Newman, PRL (2002)

$$C = \frac{1}{\sigma_k^2} \sum_{kl} kl(r(k,l) - r(k)r(l)), \quad (5)$$

13/11/22

第6回情報ネットワーク科学研究会

27