

# 統計力学的アプローチによるネットワークトポロジーの転移現象の研究

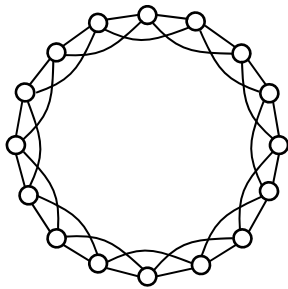
2012年12月14日

日本電気株式会社

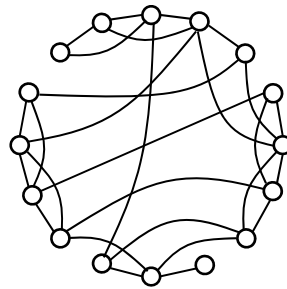
加美 伸治

# スモールワールド

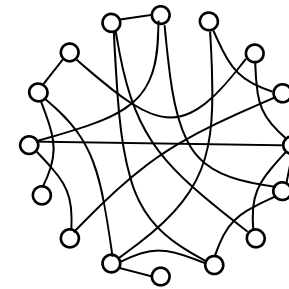
高クラスター



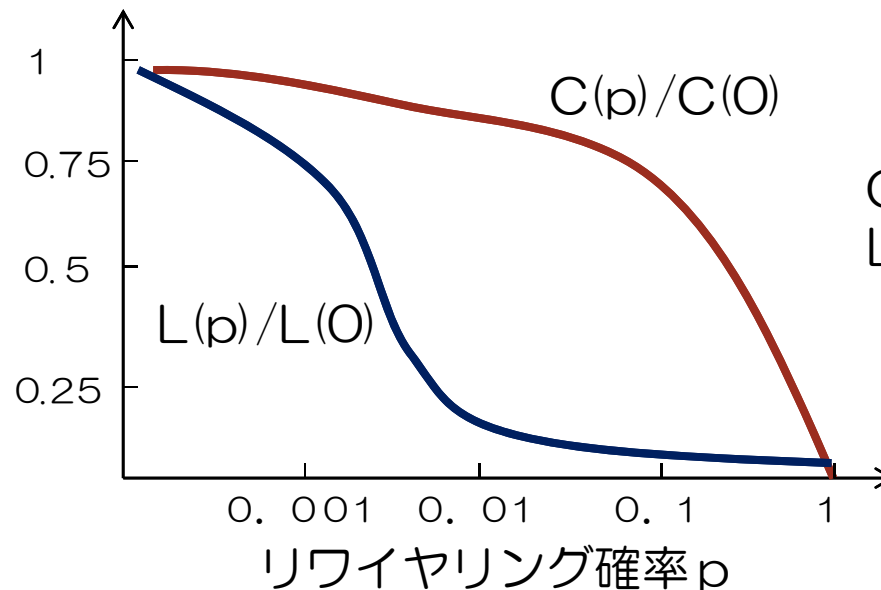
スモールワールド



ランダム



リワイヤリング確率  $p$

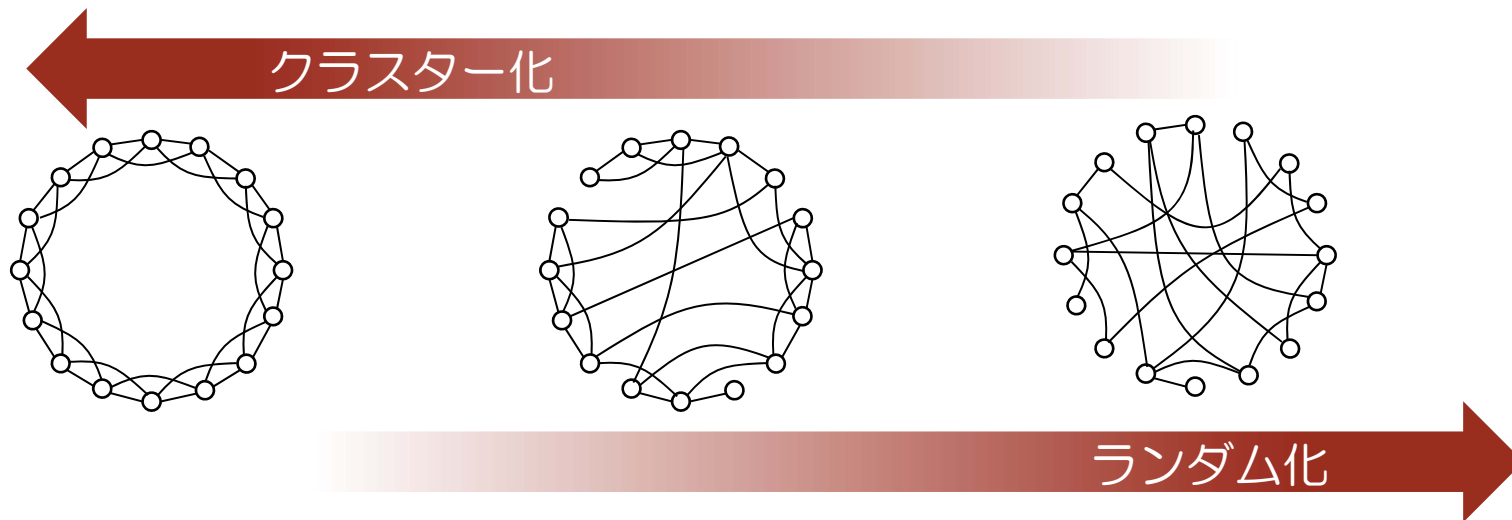


$C(p)$  : クラスタリング係数  
 $L(p)$  : 平均パスの長さ

※D.J. Watts and S.H. Strogatz, *Nature* 393, 440-442 (1998)を参考に作図

# 平衡系

- 一度きりのリワイヤリングではなく，平衡系に拡張したフレームワーク
  - クラスタ化しようとする力
  - ランダム化しようとする力

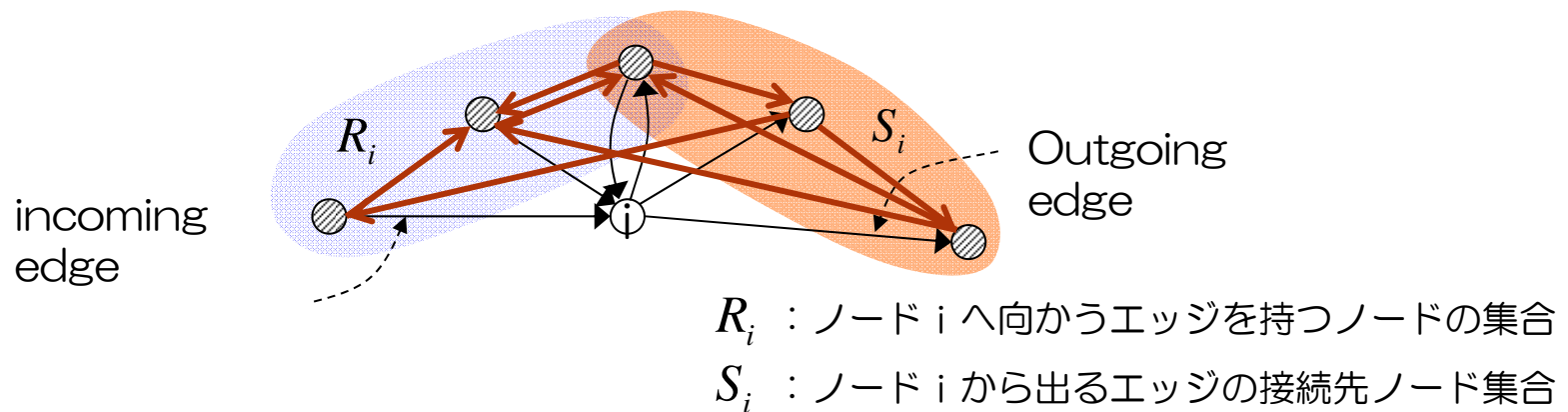


# クラスタリング係数

各ノードは、クラスタリング係数を大きくする方向にリワイヤリング

ノード  $i$  のクラスタリング係数

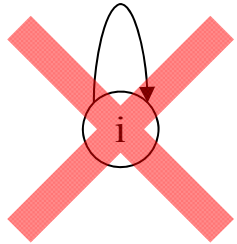
$$C_i(g) = \frac{\text{ノード } i \text{ の隣接ノード間のエッジ数}}{\text{ノード } i \text{ の隣接ノード間に存在可能なエッジ数}}$$



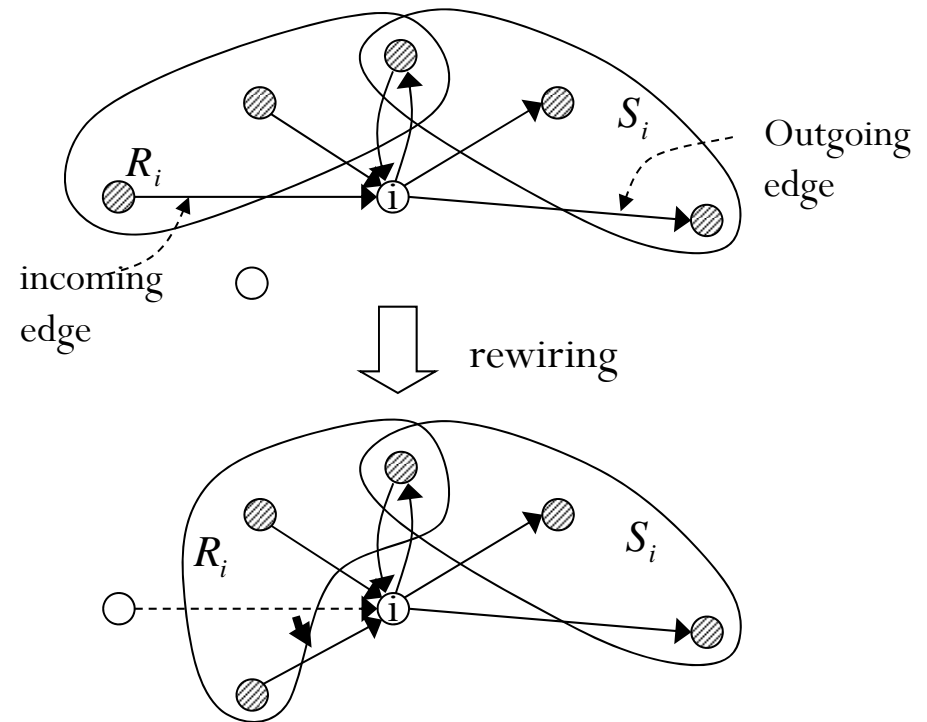
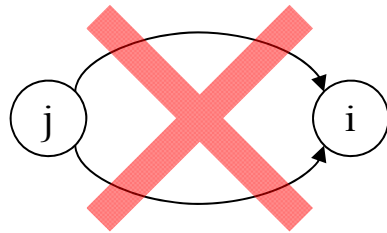
# リワイヤリングルール

時間ステップ毎に，各ノードがエッジを適当なメトリックに従って変更

自己参照リンク



二重リンク

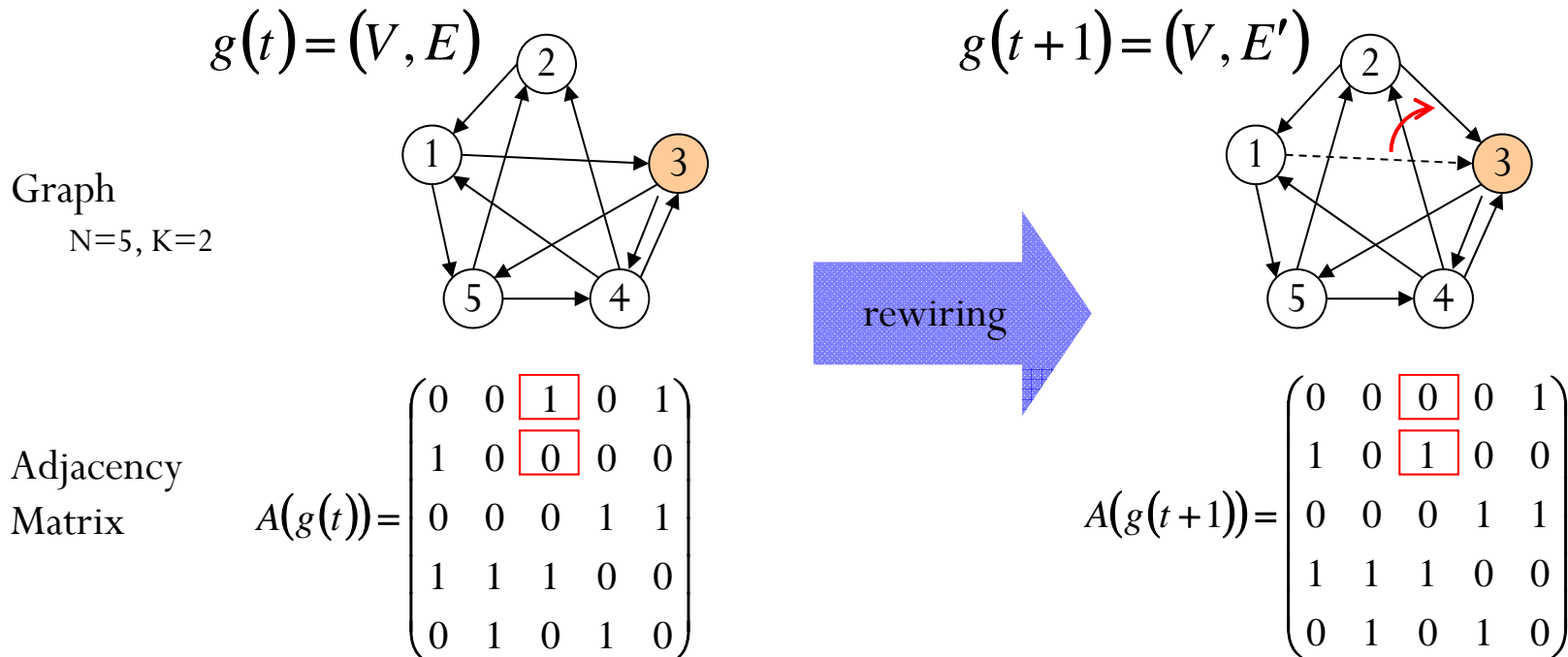


# 状態空間

**状態空間** ノード毎にK個の入力エッジをもつ、N個のノードがとりうる全てのグラフ

$$\Sigma = \{g = (V, E)\}$$

**リワイヤリング** グラフ  $g(t)$  から  $g(t+1)$  への状態遷移



# 統計力学的フレームワーク

- グラフ  $g$  のハミルトニアン：クラスタリング係数の和

$$H(g) = -\sum_{i \in V} C_i(g)$$

- 温度：リワイヤリングのランダム性を導入するパラメータ

$$T \equiv \frac{1}{\beta}$$

- ワイヤリングの発展ルール：メトロポリス法

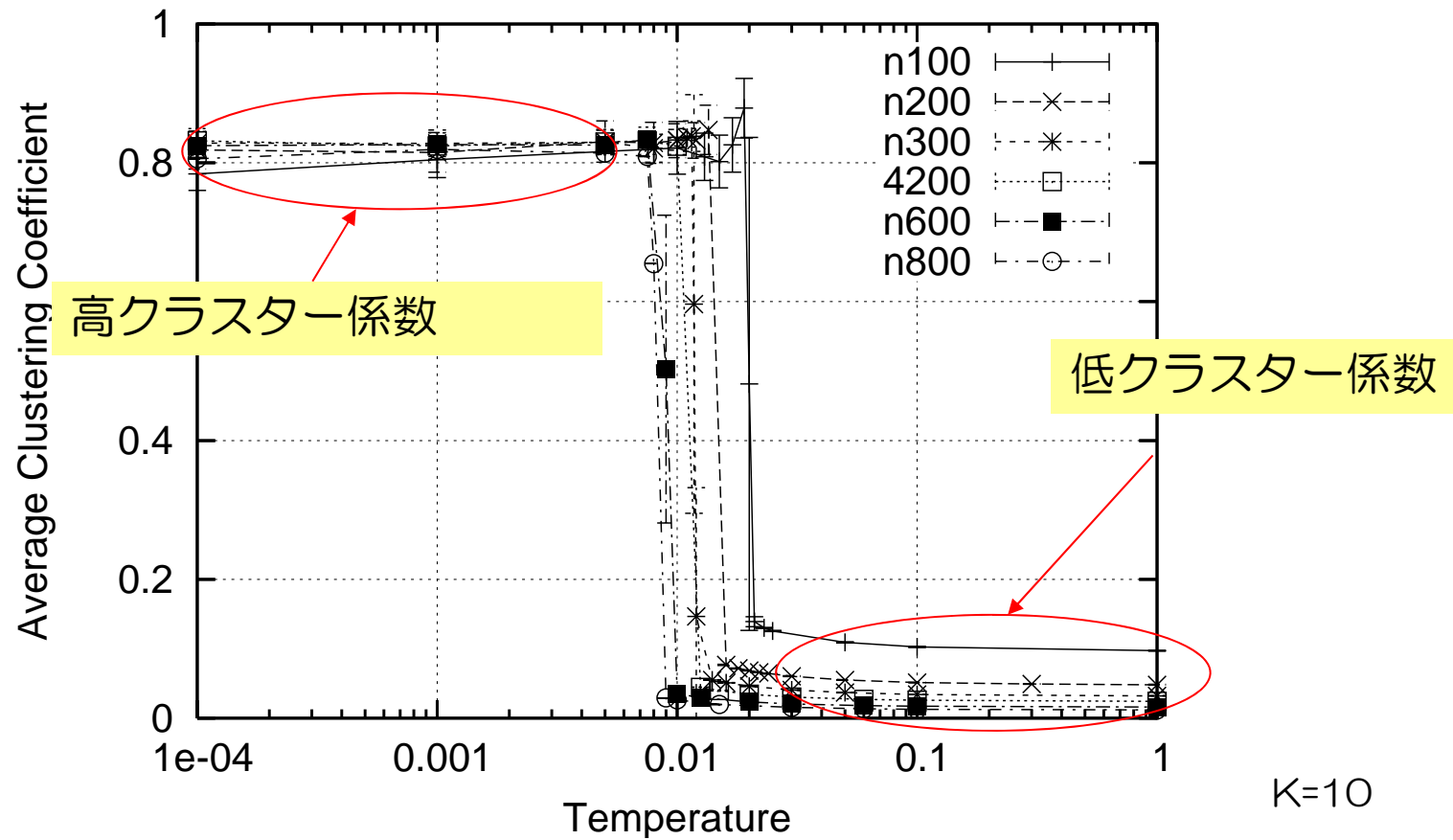
$$\Pr[g \rightarrow h] = \min\{1, \exp(-\beta\Delta H)\}$$

$$\Delta H = H(h) - H(g)$$

- 温度  $T=1/\beta$  の平衡状態においてグラフ  $g$  となる確率

$$\Pr[g | \beta] = \frac{\exp(-\beta H(g))}{\sum_{g' \in \Sigma} \exp(-\beta H(g'))}$$

# シミュレーション結果

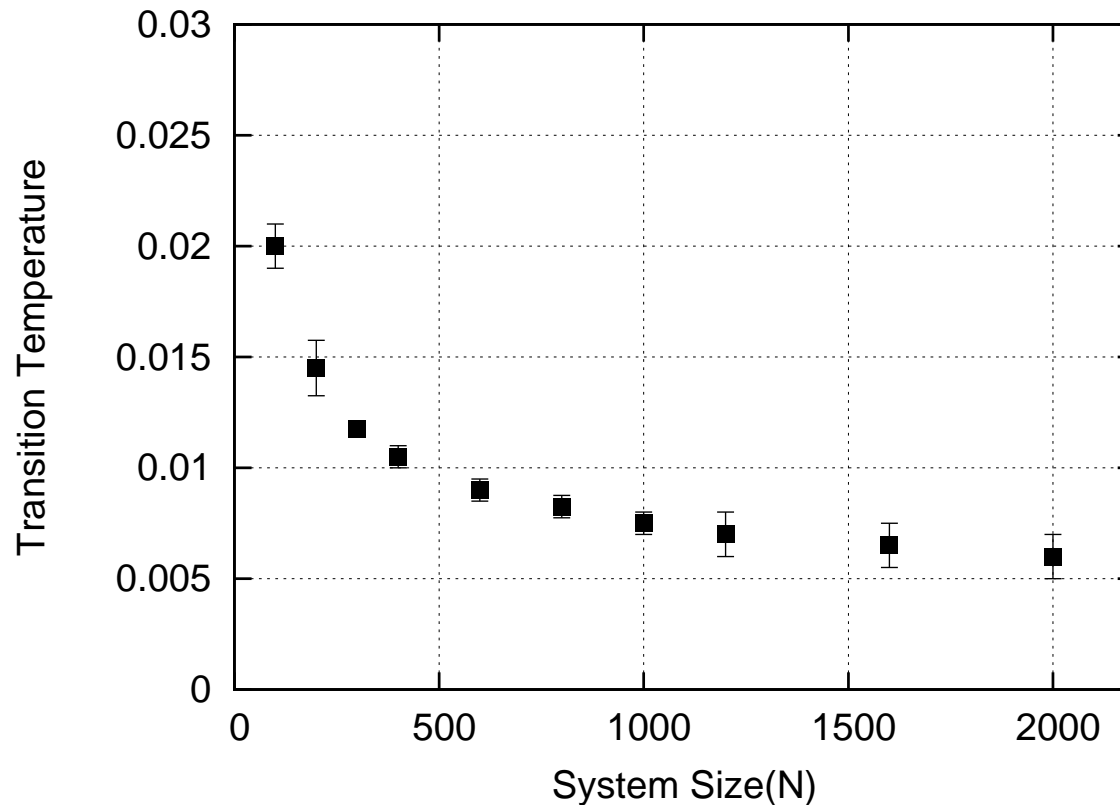




# システムサイズと転移温度

一定温度に収束

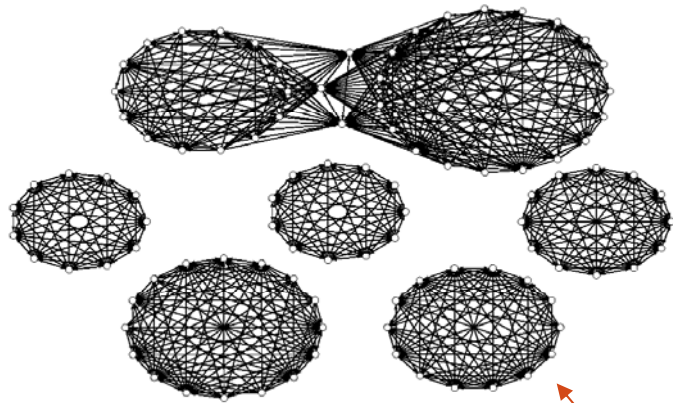
⇒有限温度での転移を示唆



K=10

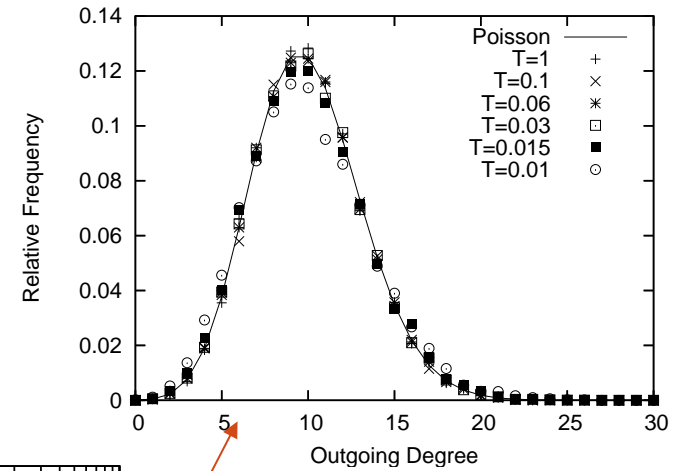
# トポロジー

低温側：  
クラスター化したネットワーク

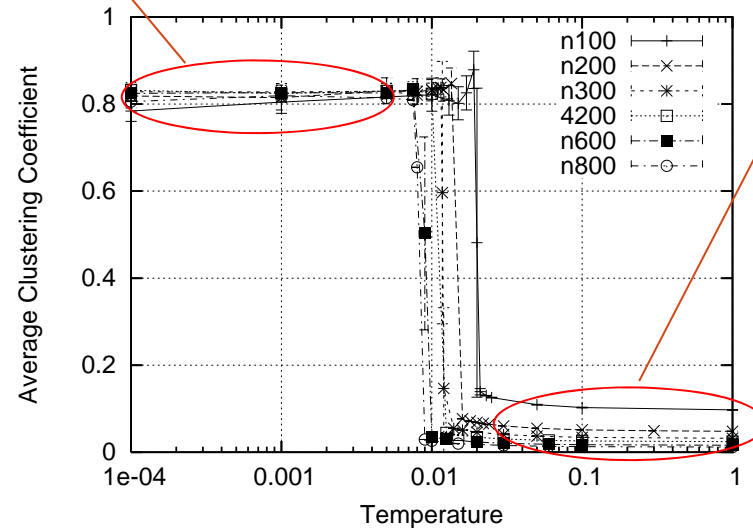


トポロジーの例

高温側：  
ランダムネットワーク



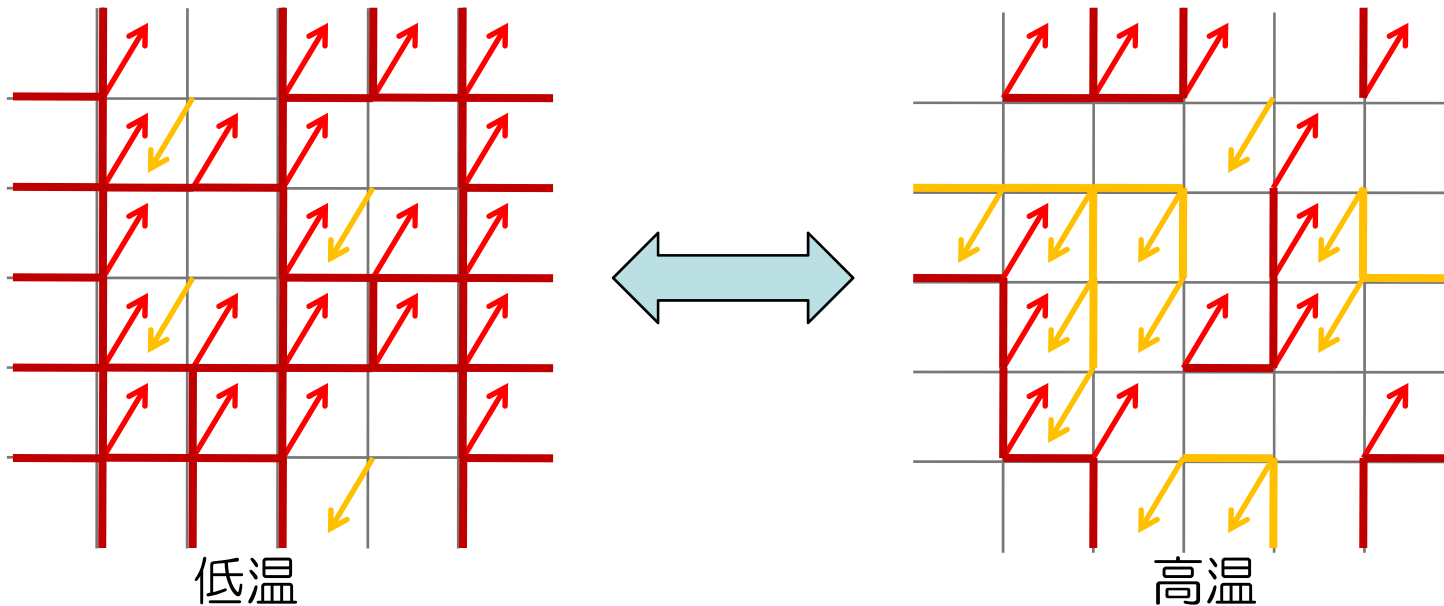
次数分布のポアソン分布との比較



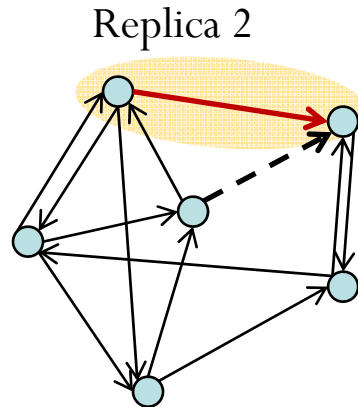
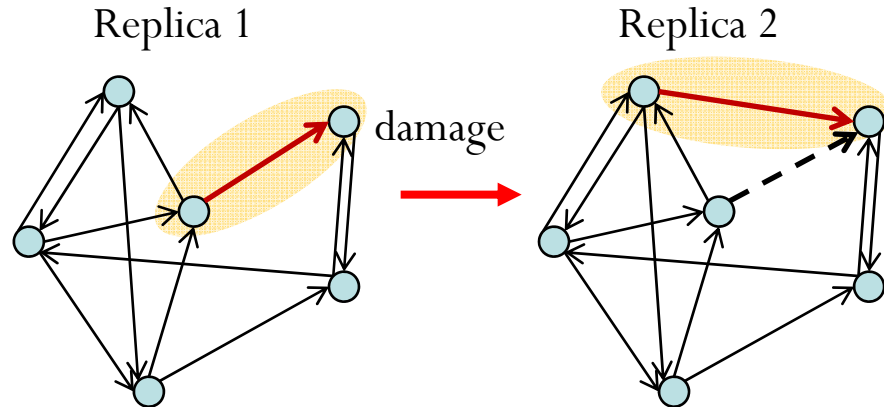
# イジングモデル

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \sigma_i \sigma_j \quad (\sigma_i = \pm 1)$$

有限温度で，巨大スピクラスターが出現

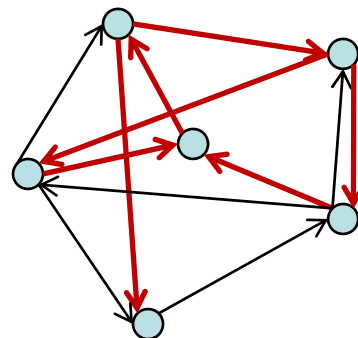
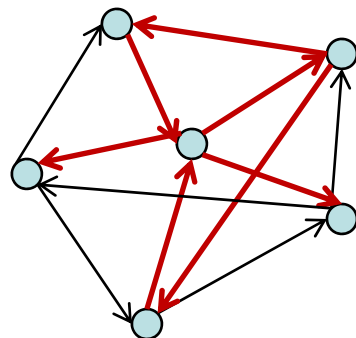


# ダメージスプレッディング



二つのレプリカに微小なダメージを導入

まったく同じ熱雑音のもとでネットワークポロジを発展



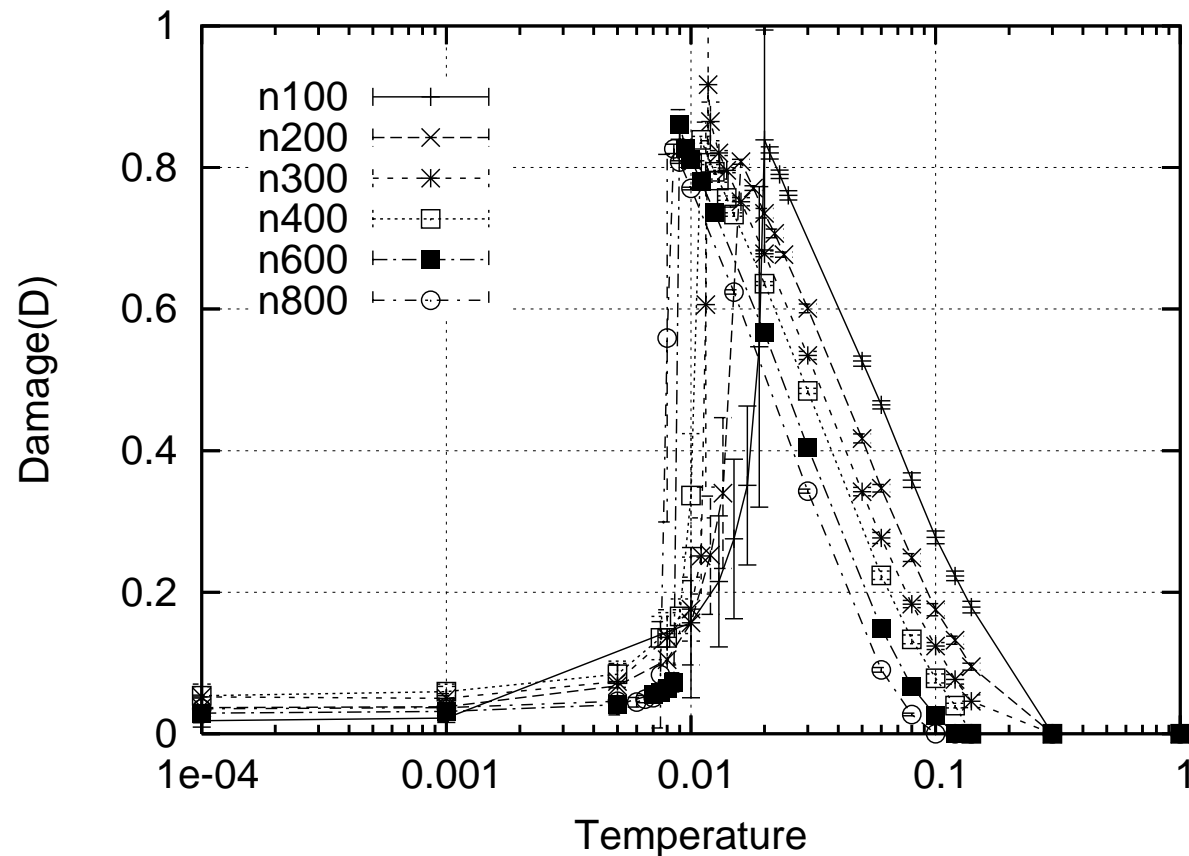
どれくらい両者が異なるか？

$$D = \frac{\#\{different\ edges\}}{NK}$$

⇒相互作用の広がり範囲の指標

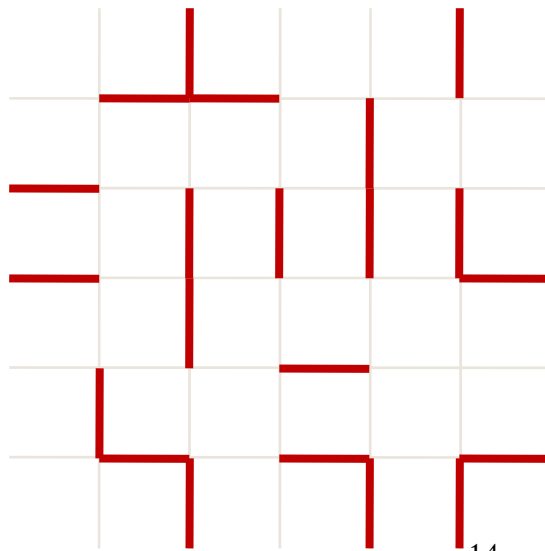
# シミュレーション結果

転移温度より高い温度範囲で、ダメージが拡大

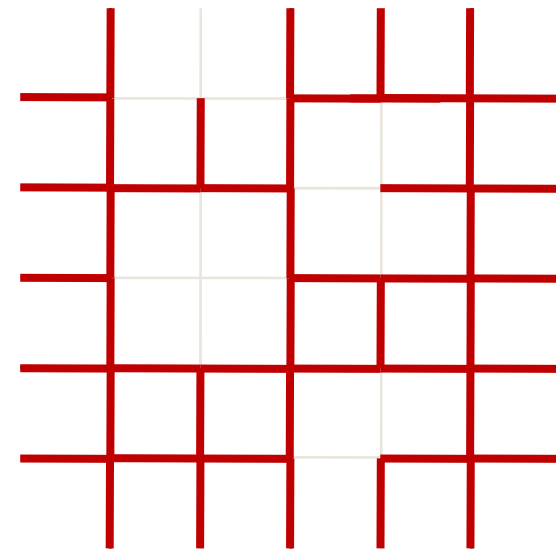


# パーコレーション

- 各エッジに確率  $p$  で占有ボンドを置いてく.
- ある  $p$  を境に巨大クラスターが出現



Low percolation prob.  $p$ <sup>14</sup>



High percolation prob.  $p$

# パーコレーション表現

ハミルトニアンの変形  $H(g) = - \sum_{\langle i,j \rangle} \underline{a_{ij}(g)} \underline{w_{ij}(g)}$

エッジ $\langle i,j \rangle$ のハミルトニアンへの寄与  
隣接行列成分

分配関数のパーコレーション表現

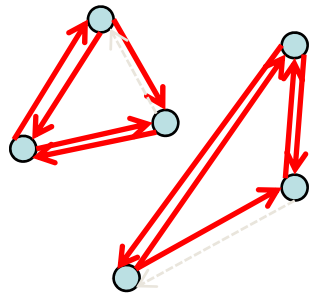
$$Z(g) = \sum_{g \in \Sigma} \prod_{\langle i,j \rangle} e^{\beta w_{ij}(g)} \prod_{\langle i,j \rangle} \{q_{ij}(g, \beta) + a_{ij}(g) p_{ij}(g, \beta)\}$$

$$p_{ij}(g, \beta) = 1 - e^{-\beta w_{ij}(g)}, \quad q_{ij}(g, \beta) = e^{-\beta w_{ij}(g)}$$

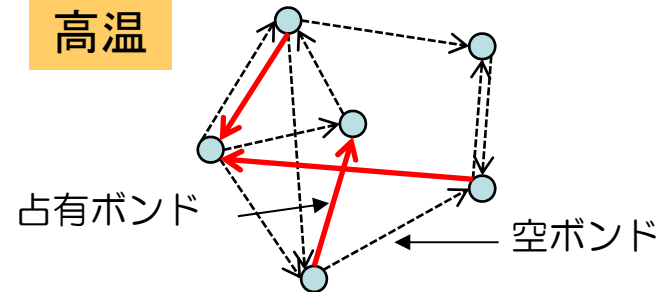
エッジ $\langle i, j \rangle$ に占有ボンド置く確率

エッジ $\langle i, j \rangle$ に空ボンド置く確率

低温



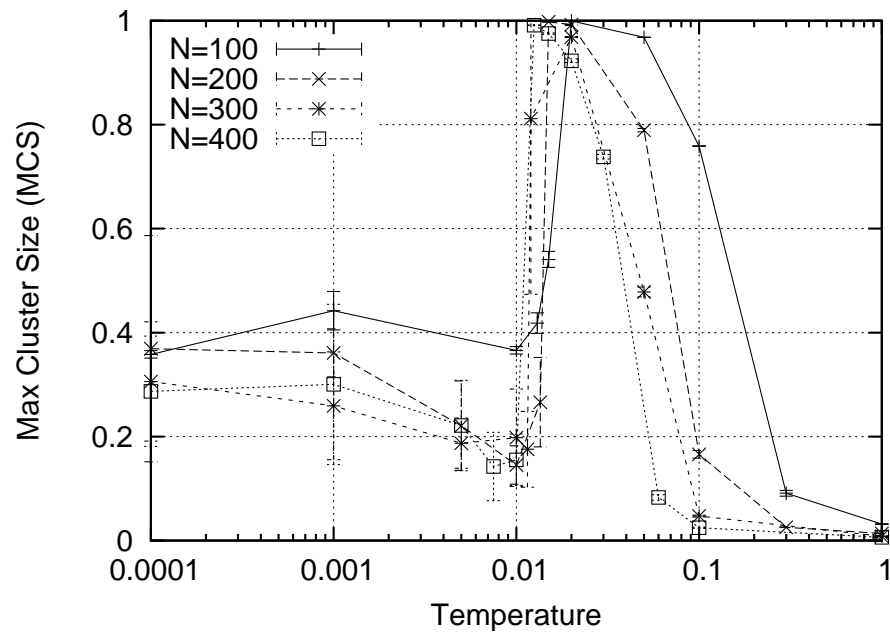
高温



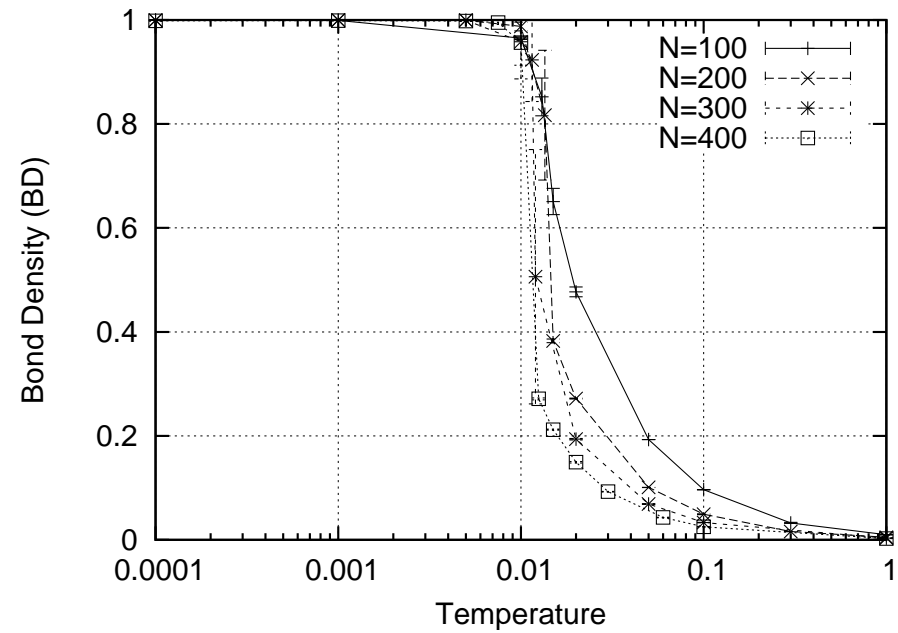
占有ボンド（意味があって接続されたエッジ）で構成されたグラフの抽出

# 最大クラスターサイズとボンド密度

## 最大クラスターサイズ (MCS)

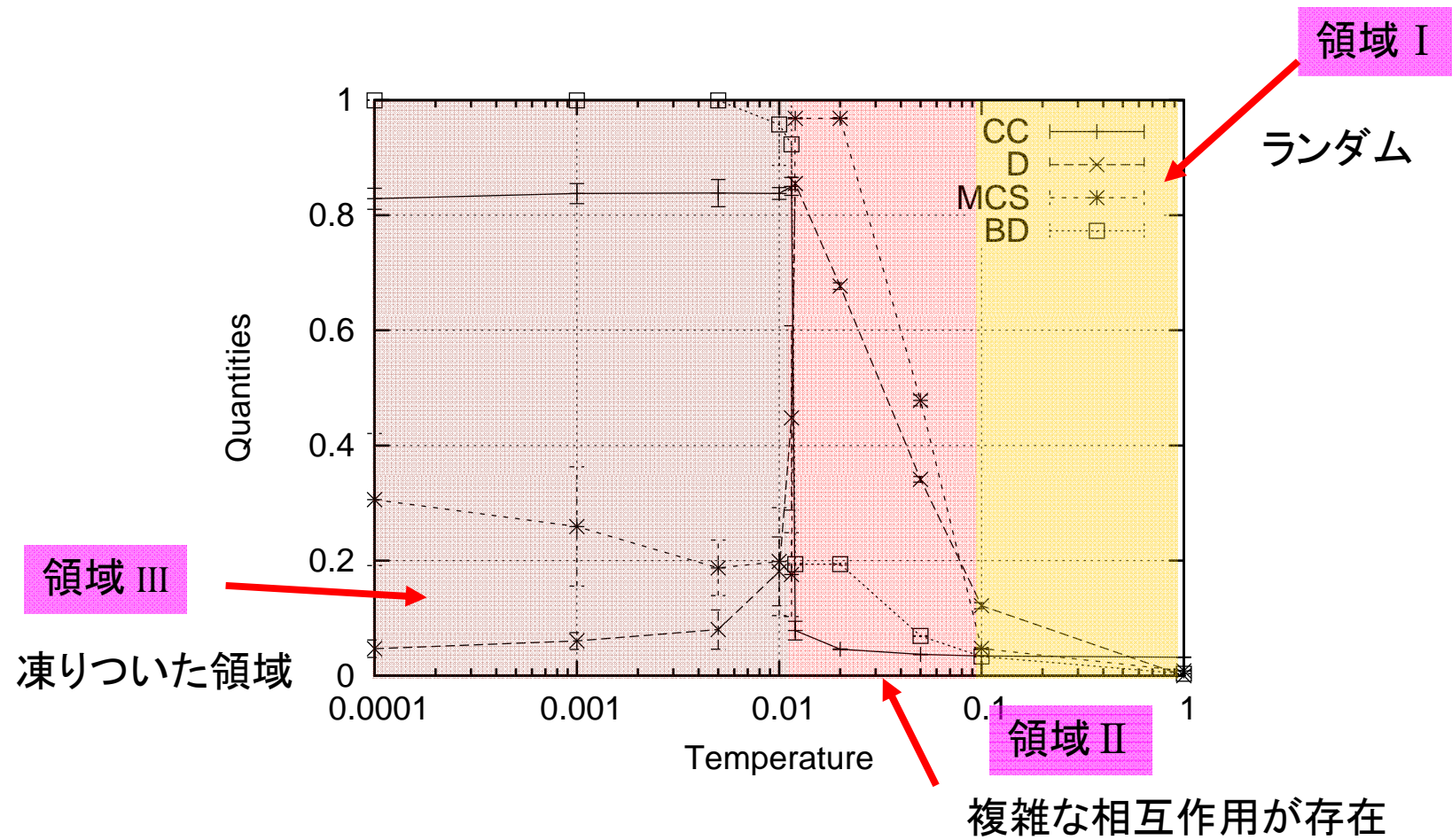


## ボンド密度 (BD)





# 三つの領域



# まとめ

- クラスタリング係数をメトリックに平衡系でのトポロジーを観察した。
  - ランダムネットワーク⇔クラスターネットワーク間での相転移的なトポロジー変化
- 転移温度より上の領域でみられるノード間の相互作用について、ダメージスプレッディングとパーコレーションから分析した。
- 今後は、転移現象をより解析的な手法で分析し、転移の詳細特性や転移温度の理論的考察を行いたい。