# 不動点理論に基づいた妥協可能制約付きネットワーク帯域幅割り当て問題を解くための反復アルゴリズム

第2回情報ネットワーク科学研究会

2012年1月20日（金）

飯塚　秀明

九州工業大学

ネットワークデザイン研究センター

# 発表の流れ

- 帯域幅割り当て問題＝非凸最適化問題

  目的:　非凹満足度関数　→　最大化

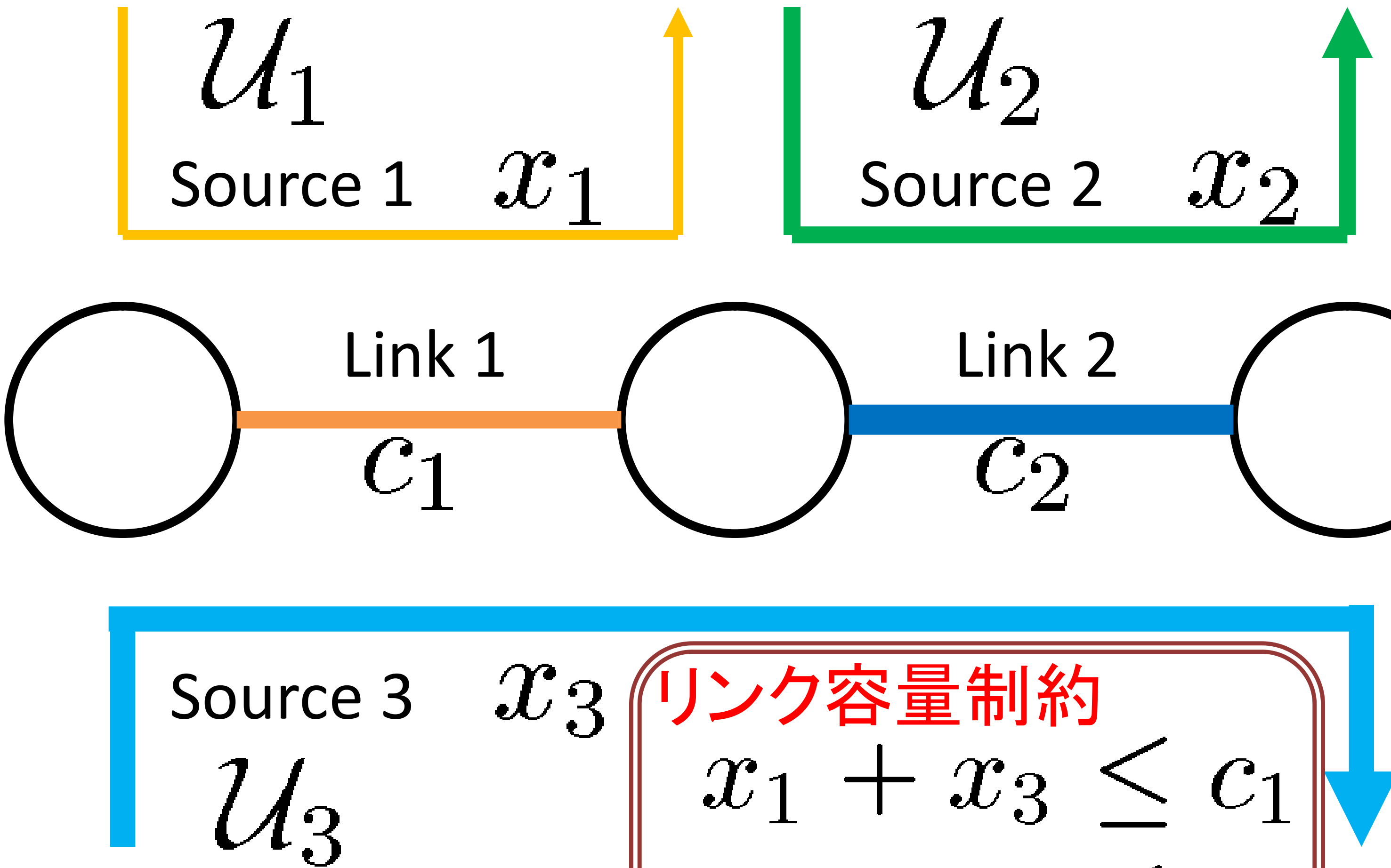
  制約: リンク容量制約

  　　　送信者の要求を表す妥協可能制約

  [先行研究]

  H. Iiduka and M. Uchida, Fixed Point Optimization Algorithms for Network Bandwidth Allocation Problems with Compoundable Constraints, IEEE Communications Letters, Vol. 15, No. 6, pp. 596-598, 2011.
- 実行不可能な帯域幅割り当て問題
- 反復アルゴリズムとその収束解析、数値例
- まとめと今後の課題

# 帯域幅割り当て問題とは




リンク容量制約

$$x_1 + x_3 \leq c_1$$

$$x_2 + x_3 \leq c_2$$

# 従来の帯域幅割り当て問題

[R. Srikant, Mathematics of Internet Congestion Control, Birkhauser, 2004]

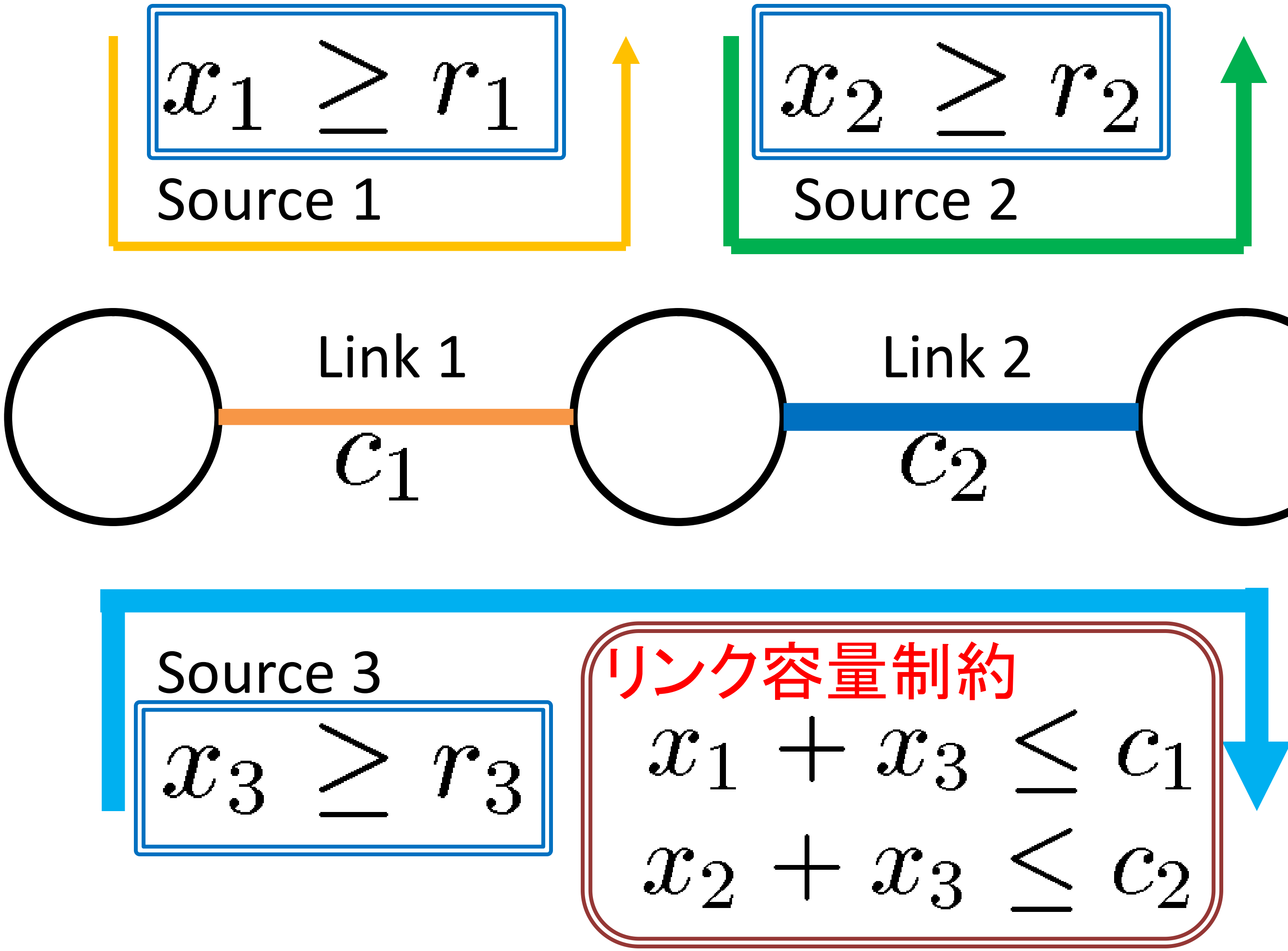
Maximize $\displaystyle \sum_{s\in\mathcal{S}} \mathcal{U}_s(x_s)$

s.t. $\displaystyle \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^S \cap \bigcap_{l\in\mathcal{L}} C_l$

例： $C_1 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 \leq c_1\}$

$C_2 := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 \leq c_2\}$

# 送信者の要求を表す妥協可能制約



# 妥協可能制約付き帯域幅割り当て問題

Maximize $\displaystyle \sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{U}_s(x_s)$

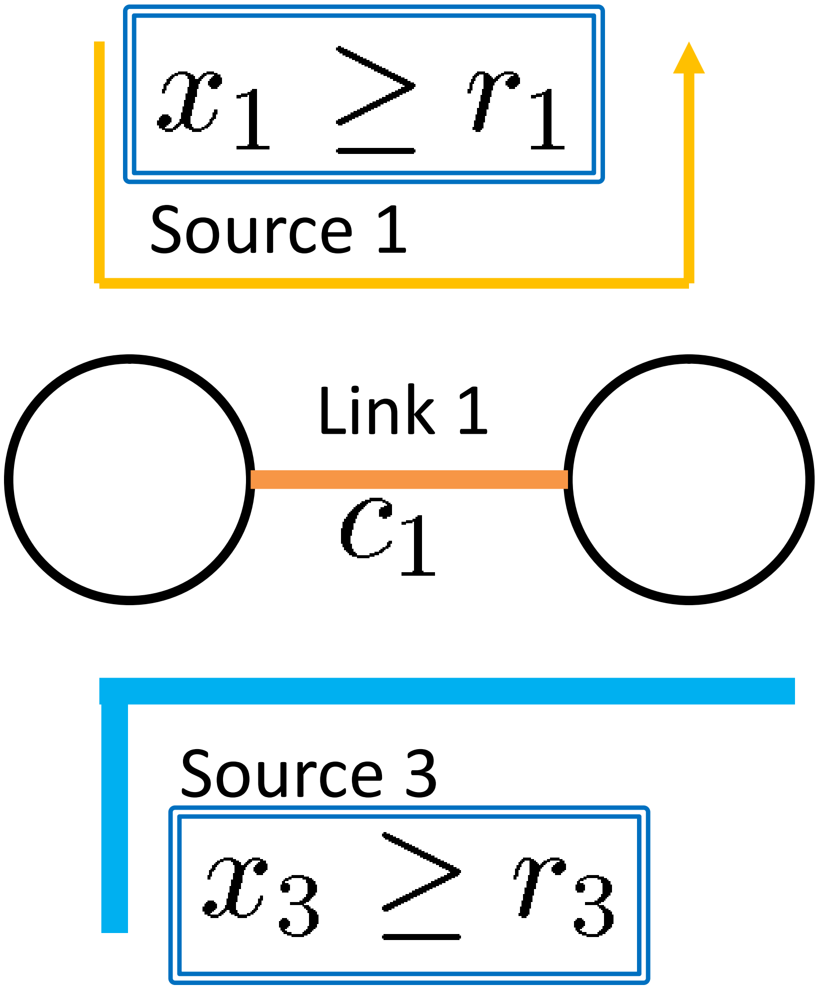
s.t. $\boldsymbol{x} \in \underbrace{\mathbb{R}_+^S \cap \bigcap_{l \in \mathcal{L}} C_l}_{C} \cap \bigcap_{s \in \mathcal{S}} D_s$

例：

$$C_l := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_l + x_3 \leq c_l\}$$

$$D_s := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 : x_s \geq r_s\}$$

# 実行不可能な制約集合




$$c_1 < r_1$$

$$C \cap \bigcap_{s \in S} D_s = \emptyset$$

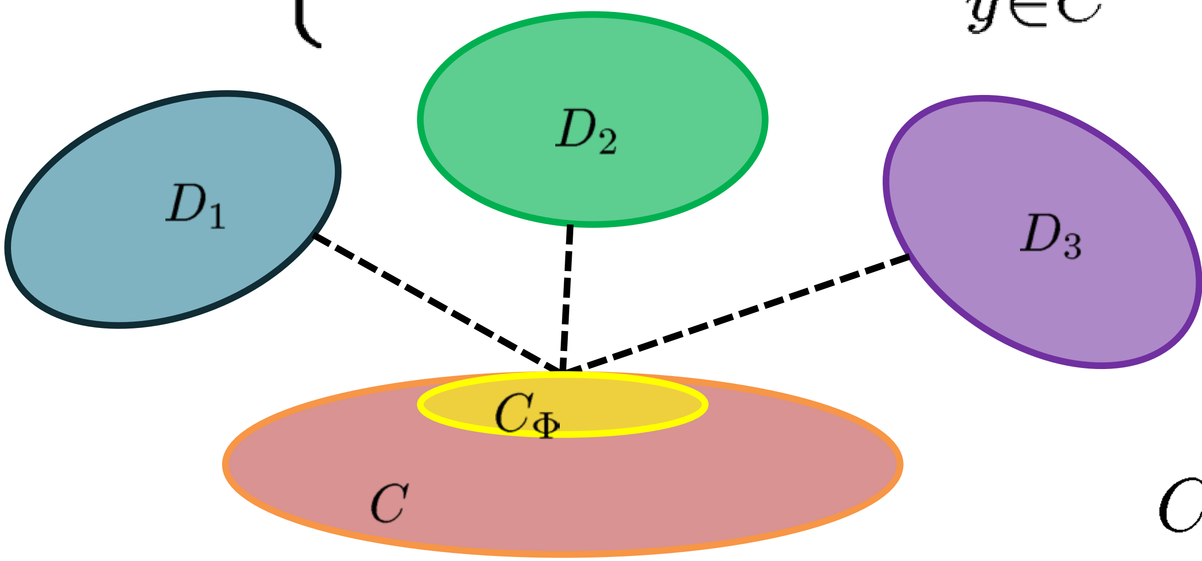
制約集合を再定義する必要がある。

# 制約集合の再定義

$$C, D_s \subset H: \ \text{closed convex } (s = 1, \ldots, S).$$

$$\Phi(x) := \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{S} \omega_s d(x, D_s)^2 \quad \left( (\omega_s) \subset (0,1): \sum_{s=1}^{S} \omega_s = 1 \right)$$

$$C_\Phi := \left\{ x \in C : \Phi(x) = \min_{y \in C} \Phi(y) \right\} \neq \emptyset.$$




Remark

$$C \cap \bigcap_{s=1}^{S} D_s \neq \emptyset$$

$$\Downarrow$$

$$C_\Phi = C \cap \bigcap_{s=1}^{S} D_s$$

# 主問題：妥協可能制約付き帯域幅割り当て問題 [I. and Uchida, 2011]

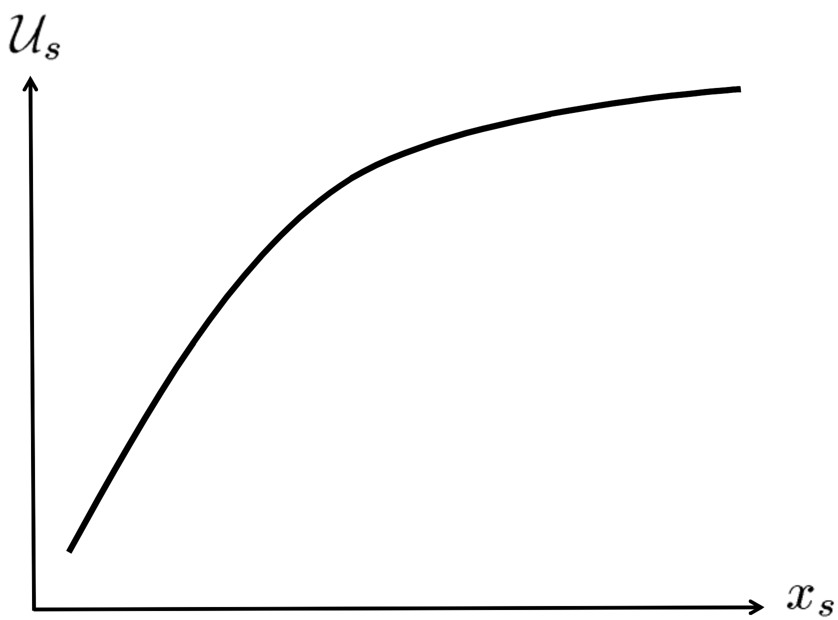
Minimize $f(x) = -\sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{U}_s(x_s)$

s.t. $x \in C_\Phi,$

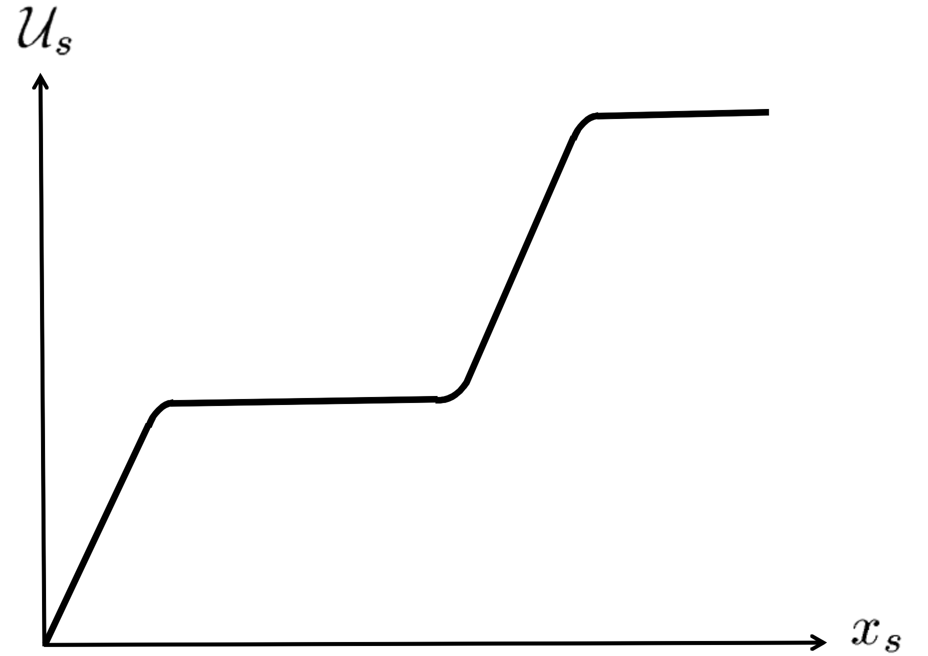
where *f* is not always convex,

$$C_\Phi := \left\{ x \in C : \Phi(x) = \min_{y \in C} \Phi(y) \right\} \neq \emptyset.$$

# 凹、及び、非凹満足度関数




送信者sに対する凹満足度関数
[Srikant, 2004]




送信者sに対する非凹満足度関数
[I. and Uchida, 2011]

# 主問題を解くためのアイデア

① 計算可能な $T$ を利用 ➡ $C$ に近づく

② $\Phi$の勾配 $\nabla\Phi$ を利用 ➡ $\Phi$ の値が減少

③ $f$の勾配 $\nabla f$ を利用 ➡ $f$ の値が減少

Minimize $f(x) = -\sum_{s \in \mathcal{S}} \mathcal{U}_s(x_s)$

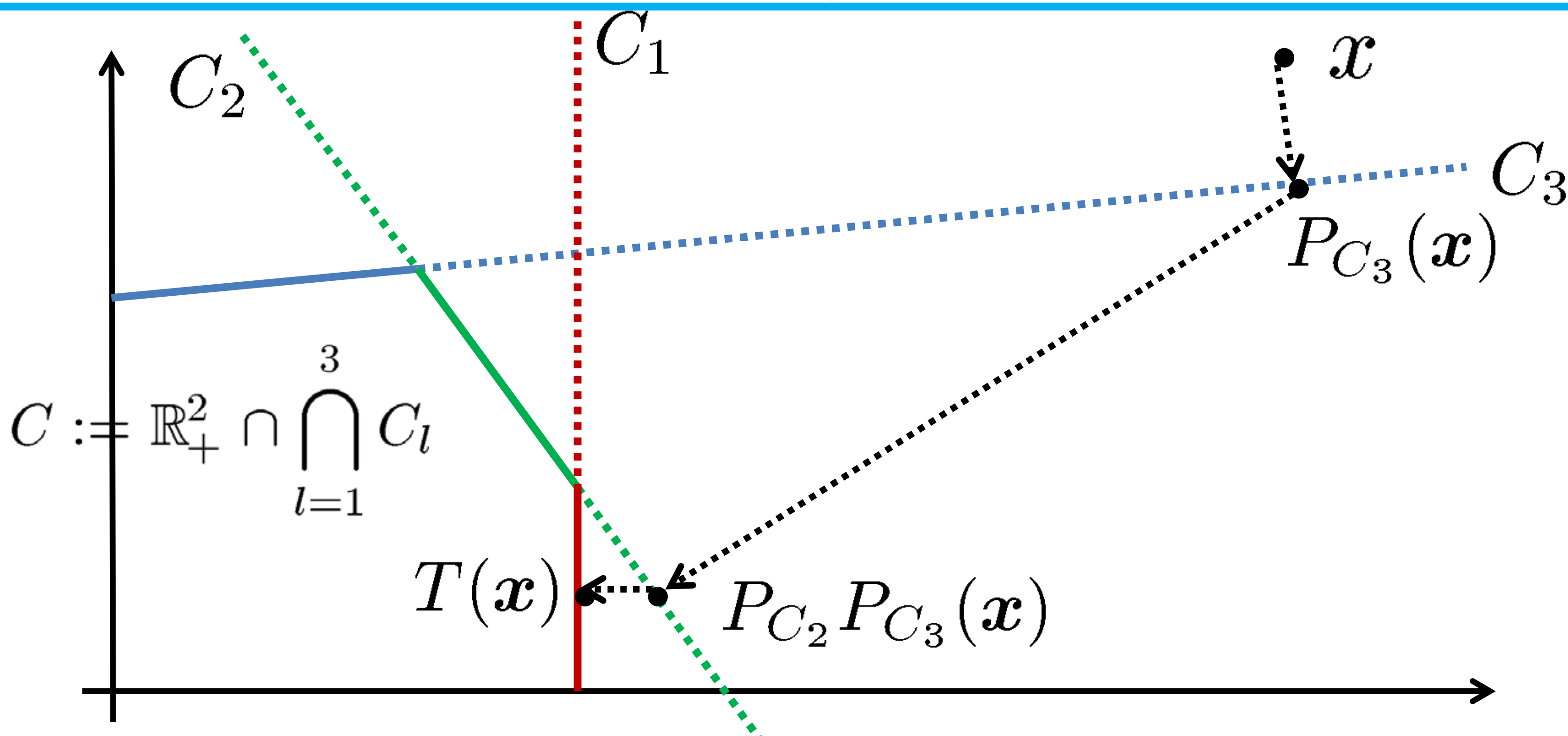
s.t.

$$x \in C_\Phi := \left\{ x \in C : \Phi(x) = \min_{y \in C} \Phi(y) \right\}$$

# ①不動点理論に基づいたアイデア

$$T := P_{\mathbb{R}_+^S} \prod_{l \in \mathcal{L}} P_{C_l}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|T(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \ (\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^S, \boldsymbol{y} \in C) \\ C = \mathrm{Fix}(T) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^S : T(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\} \end{cases}$$



# 提案アルゴリズム

$$\beta, \gamma \in [0,1), \quad \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n < \infty,$$

$$\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^S$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y}_n := T(\boldsymbol{x}_n - \lambda_n \nabla \Phi(\boldsymbol{x}_n)), \\ \boldsymbol{z}_n := \beta \boldsymbol{x}_n + (1-\beta)\boldsymbol{y}_n, \\ \boldsymbol{w}_n := T(\boldsymbol{z}_n - \alpha_n \nabla f(\boldsymbol{z}_n)), \\ \boldsymbol{x}_{n+1} := \gamma \boldsymbol{z}_n + (1-\gamma)\boldsymbol{w}_n \ (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

②Φ の値を減少

③f の値を減少

①C に近づける

# 定理（収束解析）

（A）$(\boldsymbol{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は有界

（B）$\lim_n \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| = 0, \ \lim_n \|\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{w}_n\| = 0,$

$$\boxed{\lim_n \|\boldsymbol{x}_n - T(\boldsymbol{x}_n)\| = 0}$$

①Cに収束する

（C）$\boxed{\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| = o(\lambda_n), \|\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{w}_n\| = o(\alpha_n)}$

⇒ $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}^\star \in C_\Phi,$

$$f(\boldsymbol{x}^\star) = \min_{\boldsymbol{x}\in C_\Phi} f(\boldsymbol{x})$$

ゆっくり0に減少する点列を選ぶのが望ましい

[I., Mathematical Programming, 2012]

# 数値例

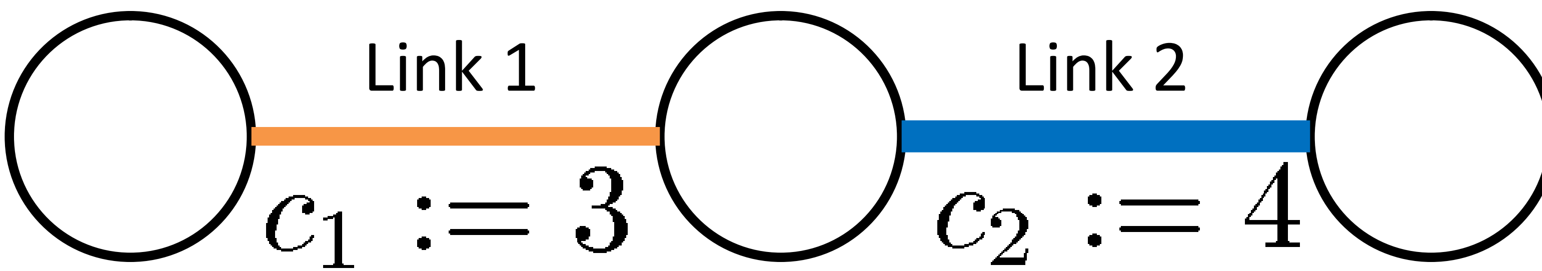
$$\mathcal{U}_s(x_s) := x_s + \sin x_s$$ （階段型の非凹関数）

$$\boxed{x_1 \geq 3}$$

Source 1

$$\boxed{x_2 \geq 4}$$

Source 2




Source 3

$$\boxed{x_3 \geq 5}$$

リンク容量制約

$$x_1 + x_3 \leq 3$$

$$x_2 + x_3 \leq 4$$

# 数値実験に関する条件

- CPU : Intel Boxed Core i7 i7-870 2.93 GHz 8M CPU
- Memory : 8 GB
- Language : MATLAB7.9

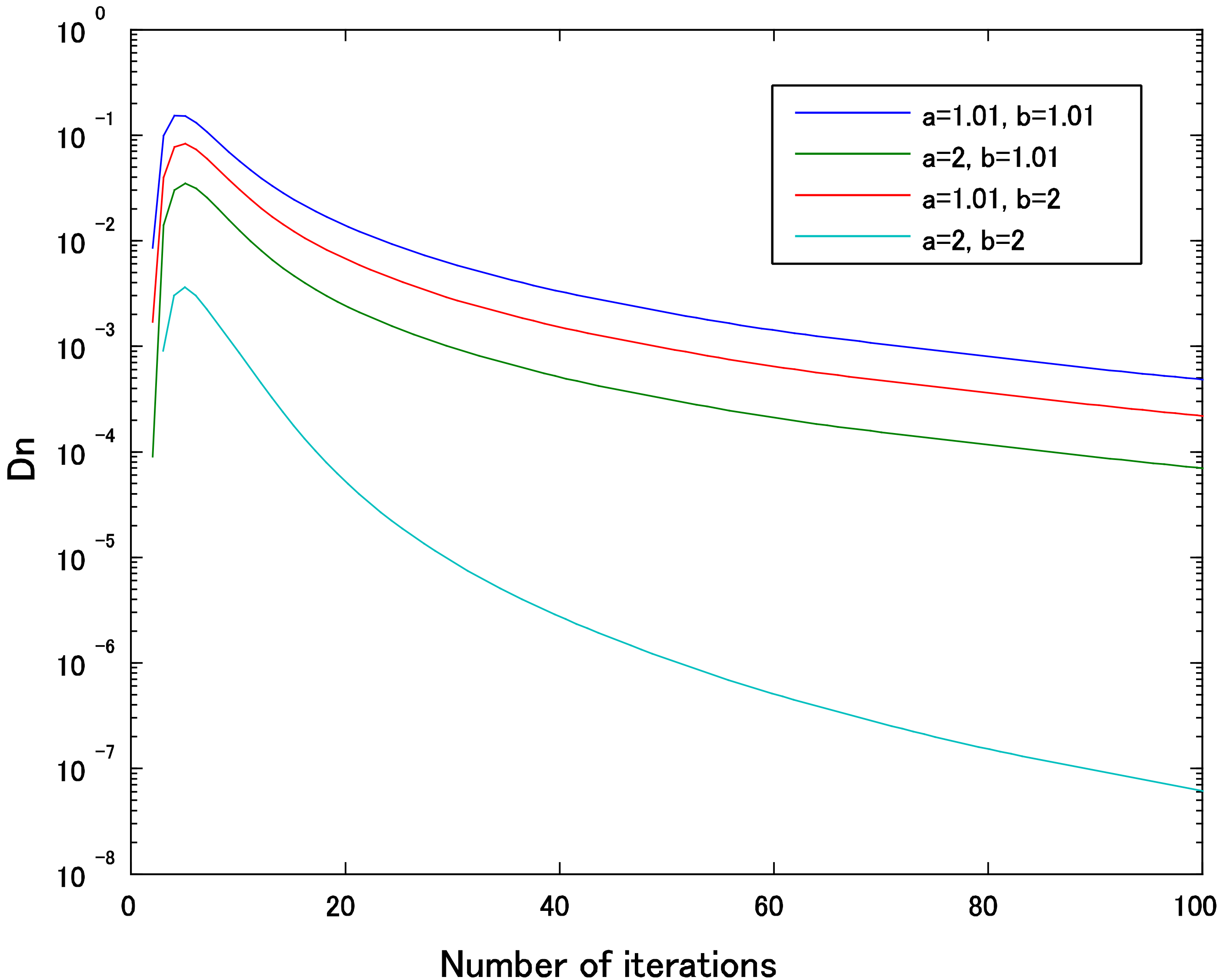
初期点をランダムに5つ選び、それらの平均値をグラフで表す。

ステップサイズ:

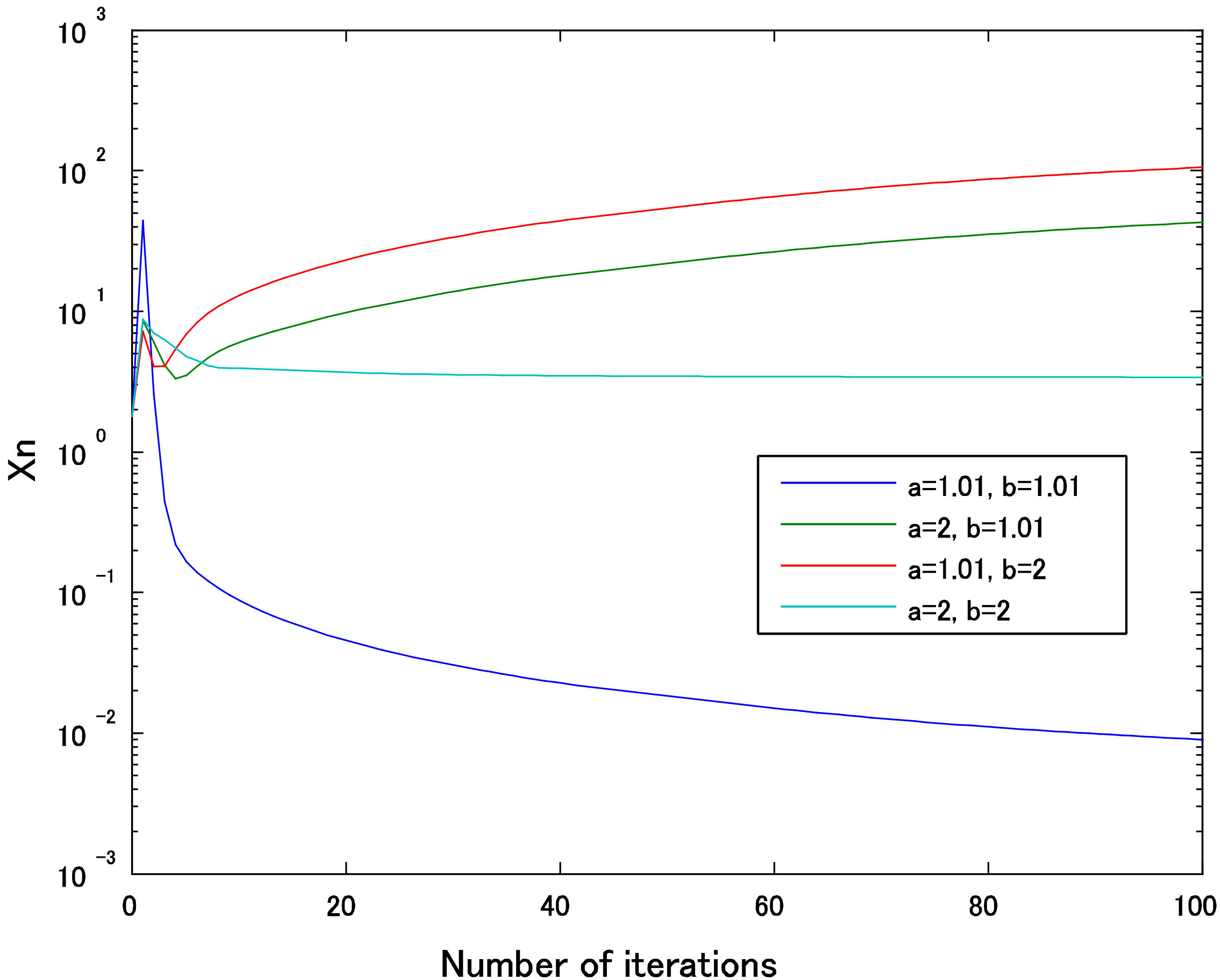
$$\beta = \gamma = 0.5,$$

$$\lambda_n = \frac{1}{(n+1)^a} \ (a = 1.01, 2), \ \alpha_n = \frac{1}{(n+1)^b} \ (b = 1.01, 2)$$

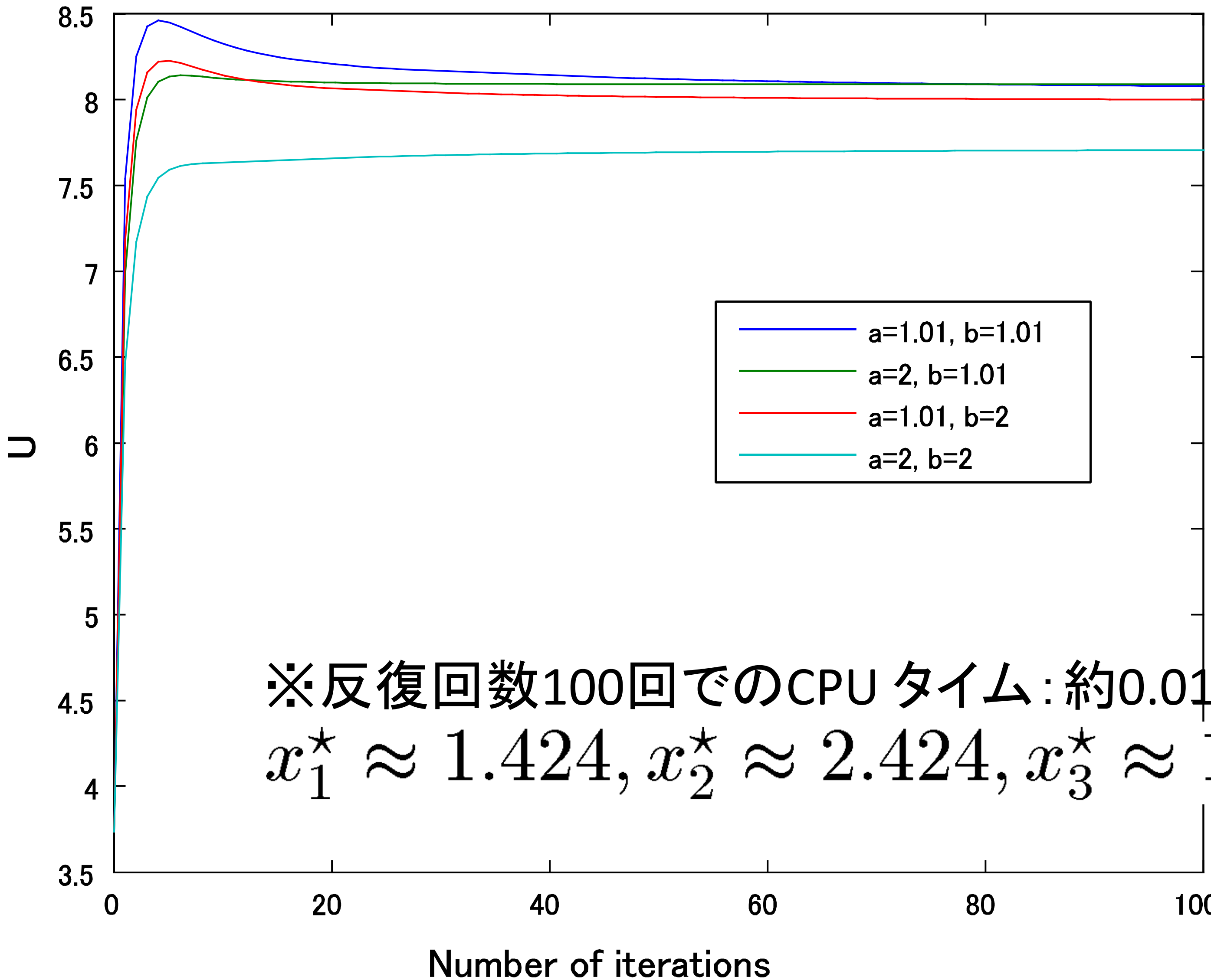
$$D_n := \|\boldsymbol{x}_n - P_{\mathbb{R}^3_+} P_{C_1} P_{C_2}(\boldsymbol{x}_n)\|$$



$$X_n := (n+1)^a \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{y}_n\| + (n+1)^b \|\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{w}_n\|$$



$$\mathcal{U}(\boldsymbol{x}) = \sum_s (x_s + \sin x_s)$$




※反復回数100回でのCPU タイム：約0.013 sec

$$x_1^\star \approx 1.424, x_2^\star \approx 2.424, x_3^\star \approx 1.576$$

# まとめと今後の課題

1. 妥協可能制約付き帯域幅割り当て問題を解くためのアルゴリズムを考案し、その収束解析を与えた。
2. 数値例は、ゆっくり0に収束するステップサイズをもつ提案アルゴリズムが解に収束する可能性が高いということを示した。
3. 他のネットワークについても、数値実験を行い、上記2と同様の結果が得られた。
4. 大規模ネットワークに対する数値実験を行い、提案アルゴリズムの有用性について確かめたい。

# 謝辞

- 本研究の一部は，日本学術振興会における科学研究費補助金
  - 基盤研究（C）（課題番号23500090）
  - 若手研究（B）（課題番号23760077）

  による支援を受けている。
  ここに記し謝意を表す。

# 参考文献

- 不動点理論


W. Takahashi, Nonlinear Functional Analysis, Yokohama Publishers, Yokohama, 2000.


- 帯域幅割り当て問題


1. F. P. Kelly, Charging and rate control for elastic traffic, European Transactions on Telecommunications, 8 (1997), pp. 33-37.
2. J. Mo and J. Walrand, Fair end-to-end window-based congestion control, IEEE/ACM Transactions on Networking, 8 (2000), pp. 556-567.
3. R. Srikant, Mathematics of Internet Congestion Control, Birkhauser, 2004.
4. H. Iiduka and M. Uchida, Fixed point optimization algorithms for network bandwidth allocation problems with compoundable constraints, IEEE Communications Letters, 15 (2011), pp. 596–598.

御清聴、有難う御座いました。