次数 57，頂点数 3250 のグラフの構成アルゴリズム

太田　陸斗†　　菊地　洋右†
†津山工業高等専門学校

1. はじめに

ムーアグラフとは，グラフ理論において次数 d，直径 k の正則グラフで頂点数の上限が以下の式に一致するもののことを指す[1]。

$$1 + d\sum_{i=1}^{k}(d-1)^{i-1}$$

次数と直径が与えられたとき，上記の式より最大となる頂点数を持つグラフは現在，直径 2，次数 3，頂点数 10（ピーターセングラフ）と，直径 2，次数 7，頂点数 50(ホフマンシングルトングラフ)の二つのグラフが証明されている。そのほか，ホフマンシングルトンの定理によると，直径 2，次数 57，頂点数 3250 となるグラフが存在しうるとされているが，いまだ証明されていない。

よって本研究では，直径 2，次数 57，頂点数 3250 となるムーアグラフの発見を目的とする。

2. アルゴリズムおよびプログラム

2.1. 木構造を利用したアルゴリズム

本研究では，頂点数 3250，次数 57 を与えたうえで，直径 2 を満たすグラフの発見を目指す。

直径が最小となるグラフを作成するにあたり効率的な方法として，サイクルに注意する必要がある。その方法は，直径を k としたときの頂点の接続は，2k または(2k+1)サイクルの部分グラフを多用するというものである。

このサイクルの条件を満たしたグラフの接続として，必ず含まれるのが木である。本研究における木は，頂点数を n，次数を d としたとき，根は d 個の子を持ち，葉でない子は d−1 個の子をもつように作成する。例として，頂点数 10，次数 3 の木の条件に沿って作成したグラフを図 1 に示す[2]。

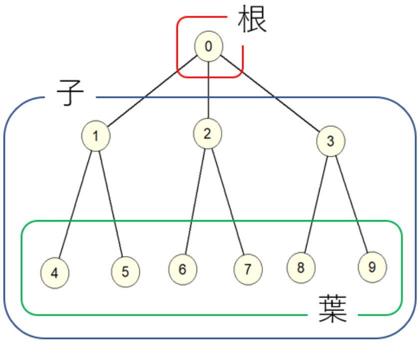

図1　頂点数 10，次数 3 の木

よって，まずは木の条件に従って頂点を接続し，葉となる頂点の接続方法について考察することで，ムーアグラフの発見を目指す。

2.2. 葉となる頂点の接続方法

葉となる頂点の接続は，次数 57 を満たしていない頂点の中から，ランダムに二つの頂点を取り出し，接続する。これをすべての頂点の次数が 57 になる，または接続する頂点がなくなるまで繰り返すという方法で接続する。実際のプログラムでは，辺数が 92625 となった時点でループを抜けるというように書いた。なぜ，辺数を 92625 としたかについてだが，辺数を e と置くと，以下の式よりグラフの辺の数が明らかになるからだ。

$$e = \frac{nd}{2}$$

そしてこの方法を，直径，および平均最短経路長(ASPL)が小さくなれば，そのグラフを上書き保存するというプログラムを 1 万回繰り返した。

3. プログラム実行結果

2 章で説明したプログラムを実行した結果， 辺数が 92625 となったグラフは 1 万回中 80 回という結果になった。その中で，一番直径および，ASPL が小さかったグラフは，直径が 3，ASPL が 2.343614…となった。

5. 考察と今後の課題

今回は頂点数 3250，次数 57 のグラフを木となるよう接続したうえで，葉となる頂点をランダムに接続することで，直径が 2 となるムーアグラフの発見を目指した。

結果は直径が 3，ASPL は 2.343614…と直径が 2 となるにはまだまだ程遠く，さらなる改良が必要である。また，葉となる頂点をランダムに接続したが，その結果合計 1 万個のグラフの中で，80 個しか辺数の条件を満たしたグラフが作成されなかったため，効率が悪かったといえるだろう。

今後についてだが，出来上がったグラフを使って，直径が 2 となるよう改良をする予定だ。

参考文献

[1] A. J. Hoffman; R. R. Singleton, On Moore Graphs with Diameters 2 and 3, IBM, pp497-504, 1960

[2] 太田陸斗，ネットワークトポロジーの最適化に関する研究，津山工業高等専門学校情報工学科令和元年度卒業報告書，2020