モンテカルロ積分における乱数分布の選定

小野寺　萌希　　　　三浦　孝夫
法政大学理工学部創生科学科

1. 前書き

定積分の数値計算方法には求積法が知られている。ここで問題となるのは、被積分関数の形状を考慮せず一様に分割した区間幅を用いることで大きな誤差が生まれてしまうこと、そして変化のない区間に対して無駄な分割を行ってしまうことである。
乱数を用いることで効率的に積分値を求める求積手法をモンテカルロ積分という。乱数を用いることで関数の変化の大小に合わせた分割が可能となり、これによって少ないサンプルでより正確な積分値を算出できる。しかし、ランダムな分割に対応する逆関数法や正規分布乱数をそのまま利用するだけでは、効率的な分割が行えるとは言い難い。

そこで本研究では、被積分関数に対して適切な確率度密度関数の選択とそれに従い生成される乱数の個数に着目し、積分値の精度を向上させる手法を提案する。いくつかの関数を対象に、様々な確率密度関数を用いた実験を行い、近似された積分値を評価する。実験結果の評価には適合度検定を用いる。

モンテカルロ積分のアルゴリズムは、確率密度関数p(x)から乱数をN個生成し、期待値によって積分の近似を行う。この期待値は定積分の値に一致する。

$$E\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\frac{f(X_k)}{p(X_k)}\right] = \cdots = \int_a^b f(x)dx$$

2. 実験結果

・$I=\int_0^2 e^{-2x^2}\,dx$

図１　p(x)＝x^2(左)と正規分布N(0,0.5)(右)

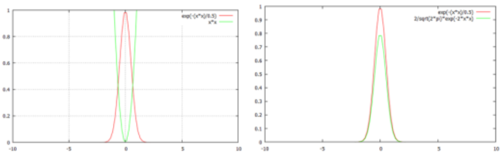

表１　確率密度関数及び乱数の個数と誤差

乱数	p(x)＝x^2	正規分布(0,0.5)	階段関数
1000	4.47	4.01E-05	1.00E-03
5000	4.27	4.01E-05	2.00E-04
10000	4.07	4.01E-05	1.00E-04
50000	3.87	4.01E-05	2.04E-05
100000	3.67	4.01E-05	1.04E-05
500000	3.47	4.01E-05	2.37E-06
1000000	3.27	4.01E-05	1.37E-06

図２　確率密度関数及び乱数の個数と誤差

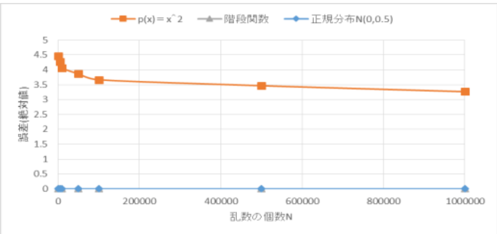

表２　適合度検定結果

	p(x)＝x^2	正規分布(0,0.5)	階段関数
χ^2	23.3002058	0	0
適合度検定	棄却	棄却されない	棄却されない

3. 考察

形状を考慮した確率度関数では誤差が約3.27減少し、精度は約99.9%向上。階段関数では誤差が約3.27減少し､精度は約100%向上し、確率密度関数の選択の重要性が立証された。

4. 結論

積分値と近似値の誤差は形状に関連する。

参考文献

[1]　杉山将(2016)　『機械学習のための確率と統計』(機械学習プロフェッショナルシリーズ)　講談社
[2]　脇本和昌(1970)　『乱数の知識』　森北出版株式会社