

# 類似検索のためのマルチベクトル特徴空間方式の提案

山根 康男<sup>†</sup> 星合 忠<sup>†</sup> 津田 宏<sup>†</sup> 石川 博<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> 富士通研究所言語処理研究部 〒211-8588 神奈川県川崎市中原区上小田中 4-1-1

<sup>‡</sup> 東京都立大学大学院工学研究科 〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1

E-mail: <sup>†</sup> {yamane.yasuo, hoshiai, htsuda}@jp.fujitsu.com <sup>‡</sup> ishikawa@eei.metro-u.ac.jp

**あらまし** マルチメディアデータの類似検索で用いられる代表的な距離に二次形式距離がある。この距離は特徴間の類似性を反映できる反面、類似していないものを類似したものと判定してしまうという問題がある。この問題を解決するために、マルチベクトル特徴空間方式を提案する。この方式では、オブジェクトをその特徴に対応する複数のベクトルが表す言わば立体として表す。二次形式距離はこの立体の重心間の距離に対応する。上記の精度上の問題が起きる原因は立体を重心で近似したことにあると我々は考えている。類似した方式に Earth Mover's Distance(EMD)がある。大きな違いは、この方式が部分マッチに重点を置いているのに対し、我々の方式は全体的比較を目的としている点にあると考えている。

**キーワード** 類似検索、特徴空間、二次形式距離、斜交基底、マルチメディアDB

## Proposal of Multi-vector Feature Space for Similarity Searches

Yasuo Yamane<sup>†</sup> Tadashi Hoshiai<sup>†</sup> Hiroshi Tsuda<sup>†</sup> Hiroshi Ishikawa<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Language Processing Laboratory, Fujitsu Laboratories Ltd.

4-1-1 Kamikodanaka, Kawasaki-shi, Kanagawa, 211-8588 Japan

<sup>‡</sup> Graduate School of Engineering, Tokyo Metropolitan University,

1-1 Minamioosawa, Hachioji-shi, 192-0397 Japan

E-mail: <sup>†</sup> {yamane.yasuo, hoshiai, htsuda}@jp.fujitsu.com <sup>‡</sup> ishikawa@eei.metro-u.ac.jp

### ABSTRACT

Quadratic-form distance is representative distance in similarity searches of multimedia data. While this distance can reflect similarities between features, it has a problem to judge that two dissimilar objects are similar. To address this problem, we propose a multi-vector feature space method. In this method, an object is represented by a solid consisting of multiple vectors corresponding to its features. A Quadratic-form distance corresponds to the distance between centroids of solids. We think the cause of the problem on precision mentioned above is the approximation of a solid by a centroid. A method similar to ours is Earth Mover's Distance(EMD). We think the large difference between EMD and ours is that while EMD is constructed giving priority to partial matching, the target of ours is to compare two objects totally.

**Keyword** Similarity Search, Feature Space, Quadratic-Form Distance, Oblique Basis, Multimedia DB

### 1. はじめに

インターネットや、デジタルカメラの普及に伴い、画像や文書といったマルチメディアデータの量が急増している。これに伴い、所望のデータを探すことがより難しくなっており、マルチメディアデータの検索技術に対する期待が高まっている。例えば、画像の検索では、Googleのイメージ検索のようにキーワード指定による検索が行なわれている。ただし、キーワードでは、ユーザが望む画像を十分に表現できない、キーワードを考えて指定するのが面倒という問題がある。そこで、画像などのオブジェクト自体をユーザが指定し、それに類似したものを検索する類似検索への期待が高まっている。類似検索では、マルチメディアデータから自動的に抽出する画像の色や形、文書の単語出現頻度といった特徴量と呼ばれるデータを自動的に抽出し、それに基づいて検索を行なう。

類似検索では検索速度とともに精度を向上させることが主要な課題である。類似検索では、一般にオブ

ジェクトはユークリッド空間内の特徴ベクトルと呼ばれるベクトルで表現され、2つのオブジェクト間の距離が近いほど似ていると考える。しかし、単純にユークリッド距離で測った場合（この最も素朴な方式をこの論文では EEr(Euclidean space, Euclidean distance, orthogonal basis)と呼ぶ）、人間には似ているものが似ていないと判定されるという問題が生じる。この問題を解決するために、各特徴間の類似性を距離に反映される研究がなされてきた。その代表的なものが二次形式距離[Hafner95]である。これと類似した方式が線形変換による方式[Jean90]である。一方、複数の点の間の距離に基づく方式に Earth Mover's Distance(EMD)がある。

#### 1.1 論文の構成

この論文の構成は以下のとおりである。まず、二次形式距離と線形変換に基づく方式が精度的に等価であること、すなわち距離が一致すること、また線形変換

に基づく方式の方が記憶量の点で二次形式距離よりも有利であることを示す。その上で、線形変換に基づく方式をこれと精度的にも記憶量の点からも等価な PPb(Pseudo-Euclidean, Pseudo-Euclidean distance, oblique basis)とよぶ特徴空間としてフォーマライズする。理由は、PPb が与える幾何的イメージが線形変換よりもわかりやすいと考えるためである。こうして、二次形式距離や線形変換に基づく方式がもつ類似していないものが類似したものと判定されてしまうという精度上の問題は PPb の問題として論ずればよいことになる。この問題は識別性の欠如という形で典型的に現れる。

そして、この PPb が持つ精度上の問題を解決するために、マルチベクトル特徴空間を提案する。この方式では、オブジェクトをその各特徴に対応する複数のベクトルが表す言わば立体として表す。PPb における 2 つのオブジェクト間の距離は、この立体の重心間の距離に対応する。上記の精度上の問題が PPb で起きる原因は立体を重心で近似したことにより、立体間の距離をうまく定義することにより、精度が向上すると考えている。この距離の定義をいかに行なうべきかについて PPb で生じる問題の例を用いて論じる。

立体間の距離の計算は、点の間の距離の計算よりもコストを要する。立体をより簡単な立体で近似することにより、このコストは軽減される。最も簡単にした近似が立体の重心である。すなわち、PPb は、この近似の系列の中で、もっとも簡単なものと位置付けられる。この意味で、マルチベクトル特徴空間は、PPb の自然な拡張となっている。

EMD との比較評価はまだ十分行なえていないが、EMD が部分マッチを主体にしているのに対し、マルチベクトル距離はオブジェクト同士の全体的な比較を目的としている点が大きく異なる。そして、2 つのオブジェクトの特徴量の合計が一致する場合に両者は等価となると推測している。

なお、我々はマルチベクトル特徴空間の適用分野として画像の色や文書を想定している。両者とも画素の色ごとの頻度、単語ごとの頻度というように、頻度により特徴付けられるという共通点を持っている。少なくともこうした頻度を特徴量とする分野に適用できるのではないかと考えている。ただし、現時点では、主に画像の色について検討した段階である。この論文でも画像の色について論じる。

## 1.2 PPb の簡単な説明

PPb はわかってしまえばそう難しくない概念であるが、最初わかりにくい面がある。それを補うために、最初にその全体像を述べておく。EEr がユークリッド空間と直交座標（直交基底）に基づくのに対し、PPb はユークリッド空間の拡張である擬ユークリッド空間と斜交座標（斜交基底）に基づく。これらを用いる理由は、特徴間の任意の類似度に対して、PPb を二次形式距離や線形変換に基づく方式と精度的に等価とするためである。特徴間の類似度を表す類似行列が正定値の場合は、ユークリッド空間で十分である。斜交基底は後述のように線形変換を表す行列と本質的には同等

のものである。しかし、行列よりも幾何的により直観的なイメージを与えてくれる。また、斜交基底はマルチベクトル特徴空間で重要な役割を果たす。これらが線形変換の代わりに斜交基底を用いる理由である。

この論文では、擬ユークリッド空間を  $n$  次元空間である  $R^m \times iR^{n-m}$  ( $0 \leq m \leq n$ ) によって定義することにする。 $R$  は実数の集合、 $i$  は虚数単位である。擬ユークリッド空間は特殊相対論において時空を表す際やパターン認識において特徴の類似性に関連して用いられている。擬ユークリッド距離はユークリッド距離と同じ式によって表されるが、一般にはユークリッド距離とは性質が異なるため“擬”をつけて呼ぶことにする。

## 2. 基本事項

### 2.1 基底

この節では、類似性の観点からベクトル空間における基底について説明する。

#### EEr 特徴空間と直交基底

オブジェクトの特徴量を実数  $c_1, c_2, \dots, c_n$  で表す。 $n$  を特徴空間の次元と呼ぶ。オブジェクトは特徴ベクトル  $f = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  として表される。ここで、 $A$  は行列（ベクトル） $A$  の転置行列（ベクトル）を表す。ベクトルとしては、基本的には列ベクトルを使うことにする。正規直交基底（今後単に直交基底と呼ぶ）を  $e_1, e_2, \dots, e_n$  とすると、特徴ベクトル  $f$  は

$$f = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n \quad (2.1)$$

とも表すことができる。

特徴空間は通常、空間と特徴ベクトル間の距離によって特徴付けられる。しかし、この論文では、特徴ベクトルを空間内に位置付ける方法を加えることにする。最も簡単でわかりやすい特徴空間の一つが、ユークリッド空間、ユークリッド距離、および(2.1)によって特徴ベクトルを位置付けるものである。(2.1)は直交基底によって特徴付けられるのでこの特徴空間を EEr(Euclidean space, Euclidean distance, orthogonal basis)特徴空間、あるいは単に EEr と呼ぶことにする。

この論文では、色の例をよく使う。その際、人間には 2 つの色の間の類似性が図 2.1 に示す色相環の 2 色間の距離に基づいて認識されるものとする。色や色の名前は覚えやすいようにするため、通常のものとは若干違うので注意されたい。

例では、色ヒストグラムを使う。これは、1 つの画像を  $n$  色に分類し、ヒストグラムの各柱が各色のピクセル数の全ピクセル数に対する割合を示すヒストグラムである。通常、 $n$  はたとえば 64 というように比較的大きな値をとるが、例では説明を簡単にするために小さい値を用いる。

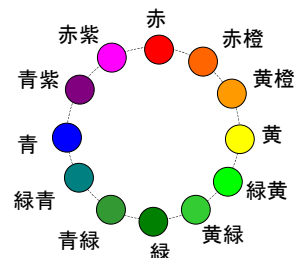


図 2.1 色相環

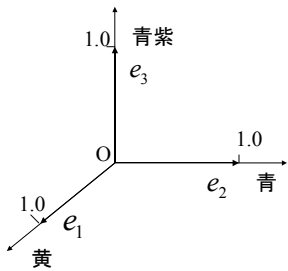


図 2.2 直交基底

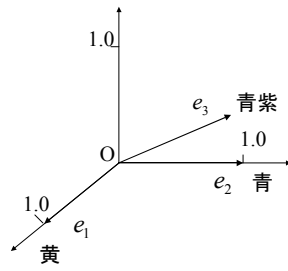


図 2.3 斜交基底

色に関して以下の記法を用いる。 $\langle C \rangle$ は単一の色  $C$  からなる画像を表す。たとえば、 $\langle \text{赤} \rangle$ は赤一色からなる画像を表す。 $\langle C_1, C_2 \rangle$ は互いに補色の関係にある2つの色  $C_1, C_2$  からなり、それぞれの色のピクセル数が同じ画像を表す。たとえば、 $\langle \text{赤}, \text{緑} \rangle$ は、半分が赤で、もう半分が緑である画像を表す。

### EEr 特徴空間の問題点

EEr 特徴空間では、任意の2色は同等に似ているものと見なされる。このことは、人間の目には似ていると感じられる2つの画像が似ていないと判断される原因となる。このことは、[Jean90]や[Hafner95]で指摘されている。図 2.2 はこの問題を説明するためのものである。ここでは3つの色だけを考える。3つの基底ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  はそれぞれ黄、青、青紫に対応する。このとき、3つの単一色の画像  $\langle \text{黄} \rangle, \langle \text{青} \rangle, \langle \text{青紫} \rangle$  の特徴ベクトルは、基底ベクトル  $e_1, e_2, e_3$  とそれぞれ一致する。2つの基底ベクトル間の距離はどれも  $\sqrt{2}$  であるが、人間には  $\langle \text{青} \rangle$  と  $\langle \text{青紫} \rangle$  は  $\langle \text{青} \rangle$  と  $\langle \text{黄} \rangle$  より明らかに似て見える。

### 斜交基底

図 2.3 に示すように、もし2色間の類似性を反映させた斜交基底を用い、特徴ベクトルを(2.1)によって定めれば、上記の3つの単一色の画像の特徴ベクトルを人間の感覚に合うようにすることができる。これについては3章で詳しく論じる。

## 2.2 今までに行なわれてきた研究

この節では、1章で述べた関連する研究について詳しく説明する。

今までに、上に述べた3つの方法以外にも特徴間の類似性を反映させるためのいろいろな方法が提案されているが、[Castelli02]によれば、二次形式距離は、最も優れたものの1つである。[Rubner01]によれば、EMDはさらに優れている。

### 二次形式距離に基づく特徴空間

ベクトル  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  のノルム(長さ)は、正方行列  $S$  を用いて、次のように表される。

$$\|v\|^2 = v^T S v$$

$$= (v_1, v_2, \dots, v_n) \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$\|v\|$  はベクトル  $v$  のノルムを表す。したがって、ベクトル  $v, w$  間の距離  $d(v, w)$  は次のように表される。

$$d(v, w)^2 = (v - w)^T S (v - w) \quad (2.2)$$

$S$  を類似行列と呼ぶ。 $S$  は単一特徴間の類似性を表す。単一特徴ということばは、オブジェクトがもつ複数の特徴のうちの1つの特徴を明確に示したい場合に用いる。各要素  $s_{ij}$  は  $i$  番目の単一特徴と  $j$  番目の単一特徴間の類似性を表す。 $s_{ij} = s_{ji}$  であるので、 $S$  は対称行列である。 $S$  が単位行列の場合、この距離はユークリッド距離に等しくなる。以降、この特徴空間を EQr (Euclidean space, Quadratic-form distance, orthogonal basis) 特徴空間または単に EQr と呼ぶことにする。

二次形式距離を単純に計算すると計算量は  $O(n^2)$  となる。[Smith97]は  $O(n)$  で計算できる方法を以下のように示している。 $S$  は対称行列であるので、(2.2)より、二次形式距離は以下のように計算できる。

$$d(v, w)^2 = v^T S v + w^T S w - 2 v^T S w$$

各ベクトル  $v$  に対して、数値  $\mu_v = v^T S v$  とベクトル  $\rho_v = S v$  を前もって計算し、二次記憶に格納しておくと、二次形式距離は検索時に次のように計算できる。

$$d(v, w)^2 = \mu_v + \mu_w - 2(v^T \rho_w)$$

この計算量はほぼユークリッド距離と同じである。しかし、二次記憶容量については、数値  $\mu_v$  は無視できるものの、EEr に比べ  $\rho_v$  のために  $v$  と同じだけの容量を余分に必要とする。今後、この高速化の方法が EQr に含まれるものとして議論することにする。

### 不定値類似行列

類似行列が正定値である場合、二次形式距離の二乗は正または0となり、二次形式距離は正の値として定義できる。しかし、不定値の場合、二乗の値が負になる場合があり、この場合は、二次形式距離は虚数になってしまう。[Hafner95]は類似行列が不定値の場合も論じており、証明はしていないが、経験上は虚数になるようなことはなかったと述べている。以下でも、類似行列は不定値でありうるとして論じることにする。

### 線形変換に基づくアプローチ

[Jean90]は類似行列  $S$  として Toeplitz 行列と呼ばれる行列を用いて議論しているが、特徴ベクトルを各特徴間の類似性を反映させた線形変換によって変換し、その後で特徴ベクトル間のユークリッド距離を測るという重要な考えを示している。Toeplitz 行列とは、左上から右下方向に同じ値が並ぶ行列である。したがって、行レベルで見ると、値が下の行に行くにつれ循環するように見える。類似行列  $S$  は  $S = T^T T$  と分解できる。このとき、2つのベクトル  $v$  と  $w$  の間の距離  $d(v, w)$  を  $Tv$  と  $Tw$  の間のユークリッド距離として以下のように定義する。

$$d(v, w)^2 = (Tv - Tw)^T (Tv - Tw)$$

この式は、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & (Tv - Tw)^T (Tv - Tw) \\ &= (v - w)^T T^T T (v - w) = (v - w)^T S (v - w) \end{aligned} \quad (2.3)$$

したがって、(2.2)と比べると、この距離は  $v$  と  $w$  の間の二次形式距離に等しくなっている。この関係を示したのが図 2.4 である。行列  $T$  を「特徴ベクトル変換行列」と呼ぶことにする。この行列には、特徴間の類似性が反映されている。前もって  $Tv$  を計算し、格納しておくことにより、検索時の距離の計算はユークリッド距離の計算だけとなり、計算量は EEr や EQr と同じく  $O(n)$  となる。この方式は、線形変換とユークリッド

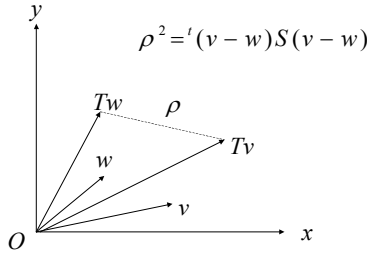


図 2.4 線形変換と二次形式距離の関係

ド距離という幾何学的にも単純でイメージしやすい方式である。

### 二方法の比較

上で述べた 2 つの方法は、二次形式距離に基づいていると言える。主な違いは、前者が特徴ベクトルと類似行列  $S$  によって変換されたベクトルの両者を必要とするのに対して、後者は特徴ベクトル変換行列  $T$  によって変換されたベクトルのみを必要とする点である。

したがって、類似行列が正定値である場合、 $T$  の要素は実数であり、特徴ベクトルを格納するために必要な容量は  $EQr$  の半分で済む。以降で、このことは類似行列が非定値の場合にも言えることを示す。

以降、線形変換に基づく方式の一つの特徴空間としてフォーマライズする。そして、この特徴空間を PPb (Pseudo-Euclidean space, Pseudo-Euclidean distance, oblique basis) 特徴空間あるいは単に PPb と呼ぶことは前に述べたとおりである。

### EMD

前述のように、EMD はマルチベクトル距離同様、複数の点の間の距離に基づいている。この距離の定義を以下、[Rubner98]にある土盛りと穴の比喩を使って簡単に説明することにする。この距離は運搬問題 (transportation problem) の解に基づく。それぞれ画像などに対応するシグニチャ (signature) と呼ばれる  $x, y$  を

$$x = \{(p_1, x_1), (p_2, x_2), \dots, (p_m, x_m)\}$$

$$y = \{(q_1, y_1), (q_2, y_2), \dots, (q_n, y_n)\}$$

とする。 $x$  が土盛りの集合、 $y$  が穴の集合に対応する。 $m$  と  $n$  は異なっても構わない。この柔軟性が EMD の特徴の一つである。 $p_i, q_j$  は任意の距離が定義されている空間内の点とする。各点  $p_i$  には体積が  $x_i$  の土が盛られ、各点  $q_j$  には容積が  $y_j$  の穴が掘られているとする。土の総体積は穴全部を埋めるのに十分あるものとする。 $d_{ij}$  を  $p_i, q_j$  間の距離、 $f_{ij}$  を  $p_i$  から  $q_j$  へ運ばれる土の量とする。このとき、全部の穴を埋めるためのコスト

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} f_{ij}$$

を最小にする  $f_{ij}$  を求め、 $x, y$  間の EMD を

$$EMD(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n d_{ij} f_{ij} / \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij}$$

と定義する。分母は正規化のためのものであり、総量が少ないシグニチャが選ばれやすくするのを防ぐ。

[Rubner98]では、画像の色とテキスチャ (模様) に EMD が適用されている。[Rubner01]によれば、二次形式距離を含め、他の距離よりも良い結果を出している。ま

た、2 つのシグニチャの総量が異なる場合は、部分マッチに対応する。この距離は 2 つの色ヒストグラムの場合とは異なり、 $m, n$  が任意に指定できるという柔軟性を持ち、距離の下限の計算が容易である。

## 3. 斜交基底

この章では、特徴ベクトルを斜交基底を用いて合成することについて論じる。

### 3.1 斜交基底に基づく特徴ベクトル

本論文では、単一特徴間の類似性を反映させるために、直交基底の代わりに斜交基底を用いて特徴ベクトルを合成する。特徴量を  $c_1, c_2, \dots, c_n$  とし、斜交基底を  $e_1, e_2, \dots, e_n$  とする。各  $e_i$  を基底ベクトルと呼ぶ。このとき、特徴ベクトルは、特徴量と基底ベクトルの線形結合として、式(2.1)と同じ式で表される。 $f_0 = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  とする。これは、直交基底に基づく特徴ベクトルである。斜交基底ベクトルを並べることによって構成される行列を  $T = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  とする。このとき、式(2.1)は次のように表される。

$$f = Tf_0.$$

すなわち、斜交基底を使って特徴ベクトルを合成することは、線形変換を使って特徴ベクトルを変換することと同じである。我々が斜交基底を使う理由は、二次形式距離や線形変換が行列によるもので抽象的であるのに対して、各単一特徴を斜交基底の各基底ベクトルとみなし、特徴ベクトルを特徴量と斜交基底の線形結合として見る見方が幾何的に具体的でわかりやすいイメージを与えてくれるためである。また、この見方は後で論じるマルチベクトル特徴空間に通じる。

#### 斜交基底が満たすべき条件

まず、直交基底と同様に次のことを斜交基底に対して要請することにする。

$$\|e_i\| = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

この意味で、斜交基底は、正規斜交基底と呼ぶべきだが、以降、直交基底と同様、簡単に斜交基底と呼ぶことにする。基底ベクトル  $e_i$  は  $i$  番目の単一特徴に対応する。 $i$  番目と  $j$  番目の単一特徴間の類似度を  $s_{ij}$  とする。このとき、さらに次のことを要請する。

$$(e_i, e_j) = s_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq n)$$

$(v, w)$  はベクトル  $v$  と  $w$  の内積を表す。さらに、基底ということばが示すように、斜交基底に対し、線形独立性を要請する。以上、斜交基底が満たすべき条件をまとめると以下ようになる。

$$(C1) \quad \|e_i\| = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$(C2) \quad e_1, e_2, \dots, e_n \text{ は線形独立}$$

$$(C3) \quad (e_i, e_j) = s_{ij} \quad (1 \leq i \leq j \leq n)$$

条件(C1)、(C2)は直交基底が満たすべき条件と同じである。また、条件(C2)は類似行列  $S$  が正則行列であること、すなわち逆行列が存在する行列であることを要請している。というのは、線形独立性から  $|T| = |e_1, e_2, \dots, e_n| \neq 0$  であり、 $S = T^{-1}T$  であることから、

$$|S| = |T^{-1}T| = |T|^{-2} \neq 0. \quad (3.1)$$

であるからである。 $|A|$  は行列  $A$  の行列式を意味する。

### 3.2 斜交基底を求める方法

この節では、3.1 で示した 3 つの条件(C1)~(C3)を

満たす斜交基底を求める方法について論じる。求め方として、固有値を用いる方法と連立方程式による方法の2つを示す。

### 固有ベクトルによる方法

[Jean90]は固有値と直交行列を用いて特徴ベクトル変換行列  $T$  を求める方法を示した。斜交基底はこの方法により簡単に求めることができる。[Jean90]で用いられた Toeplitz 行列は次のように分解できる。

$$S = P^t \Lambda P$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

$\Lambda$  は対角行列、各対角成分  $\lambda_i$  は類似行列  $S$  の固有値である。各ベクトル  $p_i$  は固有値  $\lambda_i$  に対応する固有ベクトルである。固有ベクトル  $p_1, p_2, \dots, p_n$  は互いに直交しており、したがって行列  $P$  は直交行列である。以上より、特徴ベクトル変換行列は次のように表される。

$$T = \Lambda^{\frac{1}{2}} P \quad (3.2)$$

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

上記は一般的な類似行列についても成り立つ。各固有ベクトルを  $p_i = (p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni}) (1 \leq i \leq n)$  と表す。このとき、基底ベクトルは次のように表される。

$$e_i = (\sqrt{\lambda_1} p_{1i}, \sqrt{\lambda_2} p_{2i}, \dots, \sqrt{\lambda_n} p_{ni}) \quad (1 \leq i \leq n) \quad (3.3)$$

(3.1)より  $\lambda_i \neq 0$  であるが、類似行列が不定値の場合、 $\lambda_i$  は負となりうる。そのような場合、1つ以上の純虚数が斜交基底ベクトルの中に含まれうる。このケースについては、4章で論じる。

### 連立方程式による方法

特徴ベクトル変換行列は

$$T = (e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ 0 & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e_{nn} \end{pmatrix}$$

と表せる。このとき、条件(C1), (C3)は  $T$  の要素  $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{nn}$  に関する連立方程式とみなせる。(3.1)より  $e_{ii} \neq 0$  であるので、 $e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n}, e_{22}, \dots, e_{2n}, \dots, e_{nn}$  を順に求めていくことにより解くことができる。 $e_{ij} (i < j)$  と  $e_{ii}$  の値は次のとおりである。

$$e_{ij} = (r_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} e_{ki} e_{kj}) / e_{ii}$$

$$e_{ii} = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^{i-1} e_{ki}^2}$$

$e_{ii}^2$  は実数として得られるが、 $e_{ii}$  は一般性を失うことなく正の値として求めることにする。

ここでは、類似行列は正則であるとした。しかし、詳細は省くが、上記の方法に似た方法で、任意の類似行列に対しても線形独立な斜交基底を求めることができる。ただし、 $n$  次元では、無理であり、倍の  $2n$  次元の擬ユークリッド空間では可能となる。

## 4. 擬ユークリッド空間

この章では、類似行列が不定値の場合、すなわち、純虚数が斜交基底に現れるような場合を含めて論じる。**変換された特徴ベクトル**

議論を単純にするために、類似行列の行と列を入れ替えることにより、次のことが成り立つようにする。

$$\begin{aligned} \lambda_i &> 0 \quad (1 \leq i \leq m) \\ \lambda_i &< 0 \quad (m < i \leq n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$Pv = (v_1', v_2', \dots, v_n')$ ,  $Tv = (v_1'', v_2'', \dots, v_n'')$  とすると、(3.2)より、 $Tv = \Lambda^{\frac{1}{2}} Pv = (\sqrt{\lambda_1} v_1', \sqrt{\lambda_2} v_2', \dots, \sqrt{\lambda_n} v_n')$ 。(4.1)より、 $\sqrt{\lambda_i} (m < i \leq n)$  は純虚数である。 $v_i'$  は  $P$  が直交行列であるので、実数である。したがって、 $v_i'' (1 \leq i \leq m)$  は実数であり、 $v_i'' (m < i \leq n)$  は純虚数である。すなわち、特徴ベクトルが存在する空間は、ユークリッド空間  $R^n$  ではなく、擬ユークリッド空間

$$R^m \times (iR)^{n-m}, \quad (4.2)$$

である。ここで、 $iR$  は純虚数と0からなる集合である。 $Tw = (w_1'', w_2'', \dots, w_n'')$  とする。このとき、(2.3)より、ベクトル  $v$  と  $w$  の間の二次形式距離は、次のように表される。

$$d(v, w)^2 = (Tv - Tw)(Tv - Tw) = \sum_{i=1}^n (v_i'' - w_i'')^2 \quad (4.3)$$

このことは、 $v$  と  $w$  間の二次形式距離と  $Tv$  および  $Tw$  間の距離は、 $Tv$  および  $Tw$  間の距離を擬ユークリッド空間においてユークリッド距離と同じ形の式で定義することにより、2つの距離が等しくなることを意味している。距離の定義については後で詳しく述べる。

### 例 4.1 (純虚数が現れる例)

マンセルの色立体のような色立体において、白、黒、灰の3色について考える。色立体を地球にたとえるならば、白、黒、灰はそれぞれ、北極、南極、地球の中心に対応する。すなわち、これらの3色は直線上に並ぶ。この論文では、赤、緑といった補色同士や白、黒といった対極にある色同士は独立した特徴と考えることにする。すなわち、対応する基底ベクトルは直交しているものとする。したがって、白と黒の間の距離は  $\sqrt{2}$  であり、白と灰、灰と黒の間の距離はともに  $\sqrt{2}/2$  となる。これらの距離関係を表す類似行列は次のとおりである。

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

対応する基底ベクトルは次のように求められる。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{7}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3\sqrt{7}}{7} \\ \frac{\sqrt{14}}{7} \end{pmatrix}$$

純虚数は  $e_3$  に現れている。

**距離、内積およびノルム**

(4.3)を成り立たせるために、すなわち、PPb と EQR を距離の観点から等価にするために、内積、ノルム、および距離を擬ユークリッド空間において次のように定義する。

$$(v, w) = \sum_{i=1}^n v_i w_i,$$

$$\|v\| = \sqrt{(v, v)} = \sum_{i=1}^n v_i^2.$$

$$d(v, w)^2 = \|v - w\|^2 = \sum_{i=1}^n (v_i - w_i)^2 \quad (4.5)$$

この距離  $d(v, w)$  を擬ユークリッド距離と呼ぶことにする。この定義のもとで、次の式が成り立つ。

$$d(v, w)^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2(v, w)$$

したがって、任意の基底ベクトル  $e_i$  と  $e_j$  に対して、次のことがユークリッド空間と同様に成り立つ。

$$d(e_i, e_j)^2 = 2 - 2(e_i, e_j) = 2 - 2s_{ij}.$$

この距離は、 $d(v, w)^2$  が負になりうるので、距離の公理は満たしていないことに注意されたい。

**時空との関連**

この距離は前にも述べたように、新しいものではなく、特殊相対論で使われている。時空における2点を  $(t_1, x_1, y_1, z_1)$ 、 $(t_2, x_2, y_2, z_2)$  とする。 $t_i$  は時刻を表し、 $x_i, y_i, z_i$  は空間における座標を表している。このとき、時空における2点間の距離  $d$  は次のように表される。

$$d^2 = (ct_1 - ct_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

$c$  は光速を表す。このような距離が定義される空間が一般には擬ユークリッド空間と呼ばれる。 $x_i, y_i, z_i$  をそれぞれ  $ix_i, iy_i, iz_i$  と置き換えることにより、上の式は次のように書き換えられる。

$$d^2 = (ct_1 - ct_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

この式は、(4.5)式と一致する。すなわち、時空の空間は(4.2)と同じタイプのものとなる。このように、不定値の類似行列の場合の二次形式距離の議論は、時空の議論と似ている。

**ベクトルを格納するための二次記憶量**

ここでは、特徴ベクトルを含め、ベクトルを格納するために必要な二次記憶量について論じる。特徴ベクトルが実数である場合には、1つの特徴ベクトルを格納するために必要な二次記憶量は  $nw$  バイトである。 $w$  は1つの実数を格納するために必要なバイト数である。擬ユークリッド空間においては、複素数ではなく、純虚数のみが現れ、またベクトル  $v$  において  $v_i$  が純虚数か  $0$  になるのは、 $m < i \leq n$  の場合と前もって決まっ

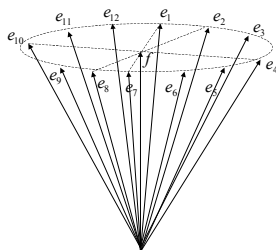


図 5.1 補色の合成

ている。したがって、すべての要素  $v_i$  を複素数としてではなく、実数として格納することができる。すなわち、[Jean90]によって提案された考えは、類似行列が不定値の場合にも適用でき、特徴ベクトルを格納するために必要な二次記憶量は EQR においてベクトルを格納するために必要な二次記憶量の半分で済む。

PPb においては、変換された特徴ベクトルは格納されるが、元の特徴ベクトル (すなわち特徴量) は格納しないものと考えている。もし、元の特徴ベクトルが必要な場合には、1つの特徴ベクトル当たり  $O(n^2)$  の時間は要するが、特徴ベクトル変換行列  $T$  は正則であるため、その逆行列を使って、元の特徴ベクトルを復元することが可能である。

**5. 二次形式距離の問題点**

この章では、精度の観点から二次形式距離の問題点について述べる。議論は前述のように二次形式距離と精度的に等価な PPb をベースに行なう。

まず、特徴ベクトルの識別性が失われる簡単な例について述べる。

**例 5.1 (直線状の場合)**

例 4.1 の白、黒、灰の例を再び考える。画像 <白、黒> に対応する特徴ベクトルを  $f_1$ 、<灰> に対応するものを  $f_2$  とする。例 4.1 の  $e_1, e_2, e_3$  の結果を使って、これら2つの特徴ベクトルは次のように計算される。

$$f_1 = 0.5e_1 + 0.5e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3\sqrt{7}}{14} \\ \frac{\sqrt{14}}{14}i \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2 = e_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{7}}{4} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

このように2つの特徴ベクトルは異なるベクトルである。しかし、(4.5)から2つのベクトルの間の距離は  $0$  となる。すなわち、2つの画像は距離的には同じものとみなされ、識別性は失われる。このようなことは EER においては起きない。そこでは、距離が距離の公理を満たしているからである

今まで斜交基底が線形独立であるものとしてきた。ここではそうでない場合を扱う (なお、3章の終わりに述べたことから次元を倍にすれば、線形独立にできることを注意しておきたい)。

**例 5.2 (円状の場合)**

図 2.1 に示した 1 2 色からなる色相環について考える。人間にとっては画像 <赤、緑> は <黄、青> よりも <赤橙、青緑> に似ているように見える。以下に示すように、これら3つの画像が PPb においては同じと見なされてしまう。

1 2 色が円の上の 1 2 等分点にそれぞれ対応するものとする。これらの点の間の距離に基づく類似行列は次のようになる。色相環に関する類似行列は Toeplitz 行列となる。したがって、類似行列の第一列のみを定義すればよい。第一列は  $s_{1j} = \frac{1}{2}(1 + \cos(\frac{\pi}{6}(j-1)))$  によって定義される。1 2 色を赤から右まわりに順に  $C_1, C_2, \dots, C_{12}$  とする。これらの色に対応する 1 2 本の基底ベクトルは図 5.1 に示すとおりである。なお、今まで基底は線形独立であるとしてきたが、上述のようにこの例では、線形独立ではない。このとき、 $\langle C_i, C_{i+6} \rangle$  に対応する特徴ベクトルは次のように表される。

$$f_i = 0.5e_i + 0.5e_{i+6} \quad (1 \leq i \leq 6) \quad (5.1)$$

特徴ベクトル  $f_i$  は図 5.3 の円の中心に対応するベクトルに全て一致してしまう。すなわち、特徴ベクトル  $f_i, f_j (i \neq j)$  間の距離は 0 になってしまう。このことは識別性がなくなることを意味している。

一方、 $f_i$  は 2 つのベクトル、すなわち、 $0.5e_i$  と  $0.5e_{i+6}$  から合成される。ここで  $0.5e_i$  と  $0.5e_{i+6}$  によって表される 2 点間の線分に注目する。これらの線分は類似性と識別性を保持している。これを合成することによってそれらが失われる。この観察が次に述べるマルチベクトル特徴空間に通じる。

## 6. マルチベクトル特徴空間

この章では、マルチベクトル特徴空間について論じる。

### 6.1 マルチベクトル距離

例 5.2 に示したように、(5.1) を使って特徴ベクトルを合成すると、識別性の消失という問題が起きる。しかし単一特徴ベクトル  $0.5e_i$  と  $0.5e_{i+6}$  は識別性ととも、特徴量と単一特徴間の類似性に関する情報を両方とも保持している。このことを考慮に入れて、次のようなこれらの単一特徴ベクトルの集合を考える。

$$F_i = \{0.5e_i, 0.5e_{i+6}\}$$

$F_i$  のような集合を「ベクトル集合」と呼ぶ。この集合は単一特徴のみならず、部分特徴ベクトルや、後で述べるようなそれらを分割したベクトルも含むことができる。部分特徴ベクトルとは 1 つ以上の単一特徴ベクトルを合成したベクトルである。ベクトル集合は一般にはマルチセット、すなわち、同じ要素を重複して含むうるものである。このような場合も含めて、ベクトル集合と呼ぶことにする。ベクトル集合間の距離を「マルチベクトル距離」と呼ぶ。この距離の定義の仕方はいろいろ考えられる。以降、この距離を、識別性の問題の解決を含め、いかに定義すべきかについて論じる。この章を通じて、 $d(v, w)$  は以前と同様、ベクトル  $v, w$  間の擬ユークリッド距離を表すものとする。

#### 定義 $\delta$ -距離

2 つのベクトル集合  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  と  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  を考える。このとき  $A, B$  間の  $\delta$ -距離を次のように定義する。

$$\delta(A, B) = \min_{\mu \in M(A, B)} \sum_{a \in A} d(a, \mu(a))$$

$M(A, B)$  は  $A$  から  $B$  の上への全単射の集合である。

#### 例 6.1 (例 5.2 へのアプローチ)

例 5.3 を考える。 $F_i = \{0.5e_i, 0.5e_{i+6}\} (1 \leq i \leq 6)$  とする。 $\delta(F_i, F_{i+j}) = 2\sqrt{1 - |\cos(\pi j / 6)|}$  であるから、  
 $\delta(F_1, F_2) = 0.732, \delta(F_1, F_3) = 1.414, \delta(F_1, F_4) = 2,$   
 $\delta(F_1, F_5) = 1.414, \delta(F_1, F_6) = 0.732$

である。ここで  $|a|$  は  $a$  の絶対値を表す。このように識別性は保持され、識別性消失の問題は解決される。また、ベクトル集合間の距離も適切と考えられる。

### 例 6.2 (例 5.1 へのアプローチ)

例 5.1 を考える。 $F_1 = \{0.5e_1, 0.5e_3\}, F_2 = \{e_2\}$  とする。2 つの集合の要素の数は異なっている。そこで、 $e_2$  を  $0.5e_2$  と  $0.5e_2$  に分割し、 $F_2' = \{0.5e_2, 0.5e_2\}$  と定義する。そして、 $F_1, F_2$  間の距離を  $\delta(F_1, F_2')$  として定義する。この距離は  $d(0.5e_1, 0.5e_2) + d(0.5e_3, 0.5e_2)$  と適切と考えられる値となり、また識別性の問題は解決される。

### 例 6.3 (類似した単一特徴へのアプローチ)

$F_1 = \{0.7e_1, 0.3e_3\}, F_2 = \{e_2, \bar{0}\}$  とする。 $e_1, e_2$  と  $e_3$  は大変近く、かつ  $d(e_1, e_2) = d(e_2, e_3)$  であるものとする。色でいえば、 $e_2$  が灰に対応し、 $e_1$  が灰よりわずかに白よりの色、 $e_3$  が灰よりわずかに黒よりの色といった場合がこれに当たる。したがって、 $F_1, F_2$  間の距離は 0 に極めて近くなければならないはずである。しかし、距離が  $\delta(F_1, F_2)$ 、すなわち、 $d(0.7e_1, e_2) + d(0.3e_3, \bar{0})$  で与えられるのであれば、距離は約 0.6 になってしまう。

この例は  $\delta$ -距離がうまく働かない場合を示している。そこで、次のようにベクトルの分割を考える。

#### 定義 ベクトル集合のベクトル分割

ベクトル集合を  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  とする。ここで、各  $a_i$  を  $a_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im} (1 \leq i \leq m)$  と分割する。この操作全体を  $A$  の「ベクトル分割」と呼び、 $\rho$  と名づける。このとき  $\rho(A)$  を  $\rho(A) = \{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq m\}$  と定義する。 $\rho(A)$  の要素数は  $m^2$  である。分割の仕方は無数にあるが、上に示した分割はそのうちの 1 つを示している。 $A$  のベクトル分割全体の集合を  $P(A)$  と表すことにする。

この操作を使って、ベクトル集合間の  $D$ -距離を次のように定義する。

#### 定義 $D$ -距離

2 つのベクトル集合を  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  とする。このとき  $A, B$  間の  $D$ -距離を、

$$D(A, B) = \min_{\rho \in P(A), \rho' \in P(B)} \delta(\rho(A), \rho'(B))$$

と定義する。

例 6.3 に戻ることにする。 $D(F_1, F_2)$  は  $d(0.7e_1, 0.7e_2) + d(0.3e_3, 0.3e_3)$  と計算される。この値はほとんど 0 に近い値となり、もつともらしい。 $D$ -距離は例 6.1 や例 6.2 においても、それぞれの例における距離と同じ値となり、同様にうまく働く。なお、我々が提案するマルチベクトル特徴空間はこの  $D$ -距離に基づくものである。

## 6.2 単一特徴集合と近似

単一特徴ベクトルだけからなるベクトル集合  $F = \{c_i e_i | 1 \leq i \leq n\}$  を考える。このベクトル集合を特に「単一特徴(ベクトル)集合」と呼ぶことにする。我々は 2 つの単一特徴集合間の  $D$ -距離が最も精度が高いと予想している。しかし、この距離を計算することは高価に思われる。我々はこれに対処するために、単一特徴集合を近似することを考える。単一特徴集合  $F$  は次の例に示すように  $m (1 \leq m < n)$  個の部分特徴ベクトルからなるベクトル集合によって近似できる。

### 例 6.4 部分特徴ベクトル集合による近似

例 5.2 を再び考える。 $F = \{c_1 e_1, c_2 e_2, \dots, c_{12} e_{12}\}, A(F) = \{a_1, a_2\}$  とする。ここで、 $a_1 = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_6 e_6$  であり、 $a_2 = c_7 e_7 + c_8 e_8 + \dots + c_{12} e_{12}$  である。これらは部分特徴ベクトルである。このとき、 $A(F)$  は  $F$  を近似する。立

体の比喩で言えば、12個の同じ質量をもつ点からなる立体を  $a_1, a_2$  という2つの重心で近似したことになる(正確に重心という意味では、 $a_1, a_2$  をそれぞれ6で割る必要があるが、省いても本質は変わらない)。単一特徴集合  $G_i = \{0.5e_i, 0.5e_{i+6}, \vec{0}, \dots, \vec{0}\}$  は例5.2における  $f_i$  に対応する。このとき、 $A(G_i) = \{0.5e_i, 0.5e_{i+6}\}$  であり、これは例6.1における  $F_i$  に一致する。したがって  $D(A(G_i), A(G_j)) = \delta(F_i, F_j)$  であり、加えて次のようなことはなかなか成り立たないが、この場合は  $D(A(G_i), A(G_j)) = D(G_i, G_j)$  となる。すなわち、この例では、 $A(G_i)$  は  $G_i$  をよく表している。

次に近似について一般的に考える。

### 定義 m-ベクトル集合

単一特徴  $F = \{c_1e_1, c_2e_2, \dots, c_ne_n\}$  を考える。斜交基底ベクトルの集合を  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  とする。ここで  $E$  を、

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad (1 \leq i < j \leq m), \quad E_i \neq \emptyset \quad (1 \leq i \leq m)$$

と分割する。そして

$$a_i = \sum_{e_j \in E_i} c_j e_j$$

とする。このとき、 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  を  $A^{(m)}(F)$  と定義する。 $A^{(m)}(F)$  を  $F$  の「 $m$ -部分特徴(ベクトル)集合」、または単に  $F$  の「 $m$ -ベクトル集合」と呼ぶ。また各  $E_i$  をクラスタと呼ぶ。

$A^{(m)}(F)$  は単一特徴集合であり、 $A^{(1)}(F)$  は PPb における特徴ベクトルに等価となる。すなわち、特徴ベクトルは、立体の比喩で言えば、単一特徴集合の重心に当たる。この定義において、基底ベクトルはそれらの類似性に基づいて、なるべく近いものが同じクラスタに分割されるように分割されるべきだと考えている。

$A^{(m)}(F)$  と  $D$ -距離に基づく特徴空間を「 $m$  次のマルチベクトル特徴空間」と呼び、 $MV(m)$  で表す。 $MV(1)$  は PPb に等価である。近似によって、識別性の消失の現象は  $m$  が増加するにつれローカライズされる。そして、確たる証拠は得ていないが、我々は  $i > j$  であれば、 $MV(i)$  は  $MV(j)$  よりも精度が高いと予想している。

### 6.3 EMD との比較

現段階では EMD との比較評価はまだ十分に行なっていない。以下、現段階でわかっていることを推測も含め述べることにする。

大きな違いは、まず、EMD が運搬問題という視点に立っているのに対し、マルチベクトル距離が立体間の距離という視点に立っている点である。もう一つの違いは次のことと考えている。マルチベクトル特徴空間が部分マッチではなく、全体としてのマッチであるのに対し、EMD では、2つのシグニチャの総量(特徴量の総量)が異なる場合は、部分マッチとなるという点である。全体と部分の違いがなくなる総量が同じ場合(色ヒストグラムはこの場合に当たる)、我々は EMD とマルチベクトル距離が等価になると推測している。我々の方式では部分マッチはできないが、文書の類似検索のように特徴量の総量が異なる場合にも、部分マッチではなく全体として比較でき

る点は逆にメリットと考えている。

シグニチャの要素数が可変であることは、記憶容量や性能などの面で EMD が有利な点である。このことは、固定次元の空間では、特徴量が0の場合、圧縮することに対応していると考えられる。

マルチベクトル距離の計算量についてはまだ十分に検討していない。ただし、少なくとも近似的にはそれほど計算量がかからない方式があるものと予想している。

## 7. まとめ

この論文では、二次形式距離や線形変換に基づく方式が精度的に等価であること、記憶量の面からは後者の方が有利なことを示した。そして、線形変換に基づく方式をこれと精度的に等価な PPb と呼ぶ特徴空間としてフォーマライズした。そして、二次形式距離や線形変換に基づく方式のもつ識別性欠如の問題を PPb の問題として論じた。

次にマルチベクトル特徴空間を提案し、いくつかの簡単な例において、識別性欠如の問題が解消することを示した。この特徴空間は PPb の、すなわち、二次形式距離の自然な拡張となっている。また、画像の色ヒストグラムにおいて、特徴を自然でゆがみのない方法で表していると考えている。実際、我々の例では適切な距離を与えていると思われる。しかし、その評価は EMD との比較を含め、初期段階である。今後、さらに精度と距離の計算速度の面から研究を進めていきたい。

## 謝辞

貴重な助言をいただいた都立大学の太田先生、片山先生、富士通研究所の増本主任研究員、上原さん、馬場さんに謝意を表します。

## 参考文献

- [Castelli02] Vittorio Castelli and Lawrence D. Bergman (editors), Image Databases – Search and Retrieval of Digital Imagery, John Wiley & Sons, INC. (2002)
- [Feynman65] Richard P. Feynman, et al., The Feynman Lectures On Physics I, Addison-Wesley Publishing Company., (1965)
- [Hafner95] James Hafner, et al., Efficient Color Histogram Indexing for Quadratic Form Distance Functions, IEEE Trans. Pattern Anl. Machine Intell. 17(7), pp.729-736, (1995)
- [Jean90] J.S.N. Jean, A New Distance Measure for Binary Images, Proc. IEEE ICASSP '90, 4, pp.3-6 (1990); Paper#: M5.19
- [Rubner98] Yossi Rubner, et al., A Metric for Distribution with Applications to Image Databases, Proc. IEEE Intl. Conf. On Computer Vision, pp.59-66, (1998).
- [Rubner01] Yossi Rubner, et al., Perceptual Metrics for Image Database Navigation, Kluwer Academic Publishers, (2001).
- [Smith97] J.R.Smith, Integrated Spatial and Feature Image Systems: Retrieval Analysis and Compression, PhD thesis, Graduate School of Arts and Science, Columbia University, New York, (1997).