

究める GTD

白井 宏

2013

目次

第1章	序論	9
1.1	光学理論	9
1.2	波動の散乱理論	10
1.3	幾何光学的回折理論の提唱	11
1.4	幾何光学的回折理論の展開	12
1.5	本書の構成	13
第2章	漸近展開	15
2.1	関数の級数展開	15
2.2	部分積分による漸近展開	17
2.3	鞍部点法による漸近展開	18
2.3.1	ハンケル関数の漸近解	24
2.4	まとめ	27
第3章	幾何光学 (GO)	29
3.1	波源の表現	29
3.1.1	線波源からの放射	29
3.1.2	点波源からの放射	32
3.2	ルーネバーク・クライン級数展開	34
3.3	幾何光学波の反射・透過	40
3.3.1	フェルマーの原理	40
3.3.2	二媒質平面境界の場合	41
3.3.3	二媒質境界面が曲率をもつ場合	47
3.4	まとめ	51
第4章	物理光学 (PO)	53
4.1	キルヒホッフ・ホイヘンスの積分表示	53
4.2	等価定理	55
4.3	キルヒホッフ (物理光学) 近似	58
4.3.1	導体楔による平面波の散乱	59
4.4	まとめ	68

第5章	幾何光学的回折理論（エッジ回折）	70
5.1	規範問題：導体楔による散乱	70
5.1.1	線波源に対する散乱界	70
5.1.2	高周波近似界の導出	72
5.1.3	エッジ回折波	73
5.1.4	点波源に対する散乱界	75
5.2	エッジ回折波の表現の一般化	79
5.2.1	ケラーの仮定	79
5.2.2	多重回折波の表現	83
5.3	導体以外のウェッジによる回折	85
5.4	まとめ	85
第6章	幾何光学的回折理論（表面回折）	87
6.1	規範問題：導体円筒による散乱	87
6.1.1	高周波近似界の導出	89
6.1.2	クリーピング波	97
6.2	クリーピング波の表現の一般化	103
6.3	まとめ	103
第7章	GTDの問題点とその拡張	105
7.1	回折係数の発散	105
7.1.1	一様漸近表現の使用	105
7.1.2	UAT	109
7.1.3	UTD	110
7.1.4	その他の一様漸近表現	111
7.2	振幅の発散	112
7.2.1	等価端部電磁流法	113
7.3	高次の回折波（スロープ回折波）	115
第8章	GTDの応用例	121
8.1	導体ストリップとの散乱問題	121
8.1.1	散乱界の定式化	121
8.1.2	導体ストリップの全散乱幅	129
8.2	厚みのある半平板による回折	136
8.3	多角柱による散乱	139
8.4	円柱による散乱	145
8.4.1	クリーピング波による結果	145
8.4.2	多角形近似による円筒散乱	145
8.5	3次元多面体による散乱	155
8.6	導波・共振構造の取り扱い	158

8.6.1	光線・導波管モード変換	158
8.6.2	方形溝による散乱	161
8.6.3	有限長平行平板導波管キャビティによる散乱	165
8.7	ストリートセル伝搬予測	169
第9章	総括	175
付録A	デルタ関数	177
付録B	幾何光学波面の近軸近似	183
付録C	キルヒホッフ近似積分の漸近評価	186
C.1	積分 (4.23) の漸近評価	186
C.1.1	方法 A (スペクトル積分評価)	186
C.1.2	方法 B (直接積分評価)	189
C.2	積分 (4.33) の漸近評価	192
C.3	積分 (4.40) の漸近評価	193
C.4	積分 (4.46) の漸近評価	195
付録D	ダイアド計算	197

目次

1.1	GTD の歴史に沿った本書の流れ	14
2.1	振動関数の積分評価	20
2.2	鞍部点 z_s を通る経路 \bar{C} 上の変化 ds とその傾き φ	21
2.3	鞍部点 z_s とそれを通る最急降下路 (SDP) と最急上昇路 (SAP)	22
2.4	式 (2.30) で与えられたハンケル関数の積分路	25
2.5	ハンケル関数の評価のための鞍部点と SDP	26
2.6	ハンケル関数の漸近解の精度	27
3.1	点 $(x = x_0, y = y_0)$ におかれた z 方向に一様な線波源	30
3.2	自由空間中の点 r_0 に置かれた微小ダイポール波源	32
3.3	位相 $\psi(\mathbf{r}) = \text{一定}$ の等位相面と $\nabla\psi(\mathbf{r})$	36
3.4	進行方向 s と垂直な $\psi(r_0)$ の波面	36
3.5	波面を二次曲面で表した近軸近似の光線と二つの焦線	37
3.6	レイチューブ (ray tube)	39
3.7	フェルマーの原理	41
3.8	二媒質平面境界における光線の反射	42
3.9	二媒質平面境界における光線の透過	45
3.10	二媒質境界面が曲率をもつ場合の光線の反射	48
3.11	二媒質境界面が曲率をもつ場合の光線の透過	50
4.1	フレネルによる回折公式	54
4.2	等価定理を用いた電磁界の計算	55
4.3	散乱体 A を取り囲む表面 S'	57
4.4	物理光学近似による電流分布	59
4.5	導体楔による散乱問題に対する物理光学近似	60
4.6	導体楔表面上に流れる電流による散乱界の計算 (物理光学近似)	62
4.7	開口電磁流分布による散乱界の計算	65
5.1	開き角 $(2\pi - \varphi)$ をもった二次元導体楔	71
5.2	回折係数の比較	76
5.3	点波源 $S(\rho_0, \phi_0, z_0)$ で照射された楔による回折波 $\hat{G}_d(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0)$ の表現	78
5.4	稜線 (エッジ) が緩やかな曲線で作られた導体楔による回折	80

5.5	エッジ間の多重回折波	84
6.1	半径 a の導体円筒による散乱	88
6.2	ワトソン変換のための複素 ν 平面内の周回積分経路 $C(= C_+ + C_-)$	89
6.3	波源 S から観測点 P に向かう直接波	91
6.4	複素 ν 平面における鞍部点と最急降下路	92
6.5	導体円筒による反射波	96
6.6	導体円筒に沿って伝搬するクリーピング波	100
6.7	曲率の変化する筒状導体に沿って伝搬するクリーピング波	103
7.1	フレネル積分 $\bar{F}(\xi)$ の引数 ξ^2 に対する距離 $k\rho, k\rho_0$ の依存性	107
7.2	フレネル積分 $\bar{F}(\xi)$ の引数 ξ と遷移領域	107
7.3	フレネル積分 $\bar{F}(\xi)$	109
7.4	エッジ上の等価電磁流からの放射	114
7.5	二回エッジ回折波において, 主要となる回折波がゼロとなる例	116
7.6	導体表面を伝搬する二回エッジ回折波	116
7.7	非等方性の放射指向性を持つ電磁流源によって照射された楔による 回折	118
7.8	三次エッジ回折波	119
8.1	導体ストリップによる回折	122
8.2	2回エッジ回折波 u_{2B}	123
8.3	導体ストリップによる遠方散乱パターン	128
8.4	導体ストリップからの遠方散乱パターン	130
8.5	垂直入射時の全散乱幅	131
8.6	厚みのある導体半平板による回折例 1	137
8.7	厚みのある導体半平板による回折例 2	138
8.8	導体四角柱の近くに置かれた磁流源 M による放射パターン	140
8.9	導体四角柱の近くに置かれた電流源 J による放射パターン	141
8.10	導体四角柱の近くに置かれた線電磁流源による放射パターン	142
8.11	変形五角柱の近くに置かれた線電磁流源による放射パターン	143
8.12	六角柱の近くに置かれた線電磁流源による放射パターン	144
8.13	曲率の変化する筒状導体に沿って伝搬するクリーピング波	146
8.14	導体円柱を正 15 角柱で近似した例 1	148
8.15	導体円柱を正多角柱で近似した例 2	149
8.16	導体円柱を正多角柱で近似した例 3	150
8.17	導体円柱を正 15 角柱で近似した例 4	151
8.18	導体円柱を正 15 角柱で近似した例 5	152
8.19	導体円柱を変形 15 角柱で近似した例	153
8.20	導体半円柱を八角柱で近似した例	154

8.21	導体多面体の計算のための導体ストリップ近似	155
8.22	等価端部電磁流法による導体多面体のレーダ散乱断面積の計算例 1	156
8.23	等価端部電磁流法による導体多面体のレーダ散乱断面積の計算例 2	156
8.24	等価端部電磁流法による導体多面体のレーダ散乱断面積の計算例 3	157
8.25	等価端部電磁流法による導体多面体のレーダ散乱断面積の計算例 4	157
8.26	二次元平行平板導波管内の電磁界表現	158
8.27	導体平板上に設けられた方形溝による散乱	160
8.28	方形溝内における導波管モード再放射のメカニズム	160
8.29	広くて浅い中空の方形溝による二次元 RCS 計算値	162
8.30	狭い中空の方形溝による二次元 RCS 計算値	163
8.31	誘電体を充填した狭い方形溝による二次元 RCS 計算値	164
8.32	平行平板導波管キャビティの RCS	167
8.33	開口端がそろっていない平行平板導波管キャビティの RCS	168
8.34	通りに沿った電波伝搬を推定するための地図情報	169
8.35	電波伝搬損分布の可視化例 1	171
8.36	電波伝搬損分布の可視化例 2	171
8.37	電波伝搬損推定例 1	172
8.38	電波伝搬損推定例 2	172
8.39	通りに沿った見通し外電波伝搬損の推定	173
8.40	通りに沿った見通し外電波伝搬損の推定	173
8.41	道路幅による通りに沿った見通し外電波伝搬損の変化	174
A.1	超関数 1 を定める基本列 $\{e^{-x^2/n}\}$	178
A.2	デルタ関数	180
B.1	曲線 $x = f(x)$ 上の点 P における曲率半径 R	183
C.1	式 (C.6) と式 (C.26) を漸近評価するための角度 w 平面内の積分路	188
C.2	式 (C.15) を漸近評価するための複素 x' 平面内の積分路	190
C.3	式 (C.33) と式 (C.38) を漸近評価するための角度 w 平面内の積分路	194

表 目 次

2.1	相補誤差関数 $\operatorname{erfc}(z)$ の漸近展開	18
4.1	各近似による各回折係数の比較	69
6.1	エアリ関数 $\operatorname{Ai}(-\alpha)$, $\operatorname{Ai}'(-\alpha)$ のゼロ点	98
8.1	垂直入射時の全散乱幅	135

第1章 序論

幾何光学的回折理論は、幾何光学的な解釈を回折した波動にも使えるように拡張した理論である。光も電磁波の一部であることが、マクスウェル (Maxwell, J. C.) によって 19 世紀に示されるまで、両者はそれぞれ異なるものとして扱われ、可視光線に代表される光学の理論は、電磁波の理論よりも早くから発展してきた経緯がある。望遠鏡に使われたレンズの理論等は、もし光が電磁波ということがわかっていたら、これほど発展しなかったであろうといわれている。

1.1 光学理論

古典的な光学は、大別して幾何光学と波動光学に分けられる。人間の眼にどのように像が映るのかといった視覚の研究に関連して、ギリシャ時代には眼から炎のような光が出ているという能動的な考え方が、プラトン (Plato) によって提唱された。その後ユークリッド (Euclid) やプトレマイオス (Ptolemy) らにより、視線が直進、反射、屈折するとした幾何光学 (geometric optics あるいは geometrical optics; GO) が作られた。幾何光学では、まさに光を粒子と考えて、その粒子の飛んでいく軌跡を光線と考えている。ユークリッドらの考え方を反転し、眼に像が映るのは、外部の光線が眼に入ることによって受動的に起きることを示したのは、アラビアのイブン・アルハイサム (アルハゼン) (Alhazen) であり、彼は幾何光学のその後の発展に大きく寄与した。この幾何光学によって、レンズを通過する光線のように、空気中で直進し、レンズ表面で反射・屈折したりする様子を表すことができたが、二つ以上の波源からの干渉や回折は説明できなかった。

それに対して、光線に光の波動性を考慮し、位相や波面の振幅について導入したのが波動光学 (wave optics) である。この波動光学と同様な用語として用いられるものに物理光学 (physical optics; PO) がある。物理光学は、どちらかという波動光学ほど厳密な式を用いることなく、高周波の近似式を導入して解くときに使われる光学として使われることが多い。

電磁波の近似解析手法としては、大きく分けて幾何光学近似と物理光学近似の二つの用語がよく用いられる。いま使われている幾何光学近似においては、光線の位相や振幅を考慮することにより、干渉も説明できるが、反射、透過量の計算はそれが生じている点近傍だけで求めることになる。したがって幾何学的な局所的な形状がわかれば、その点の近傍の情報をもとに位相や振幅を計算する。局所

的な形状による反射・透過を考えるためには，表面の曲率のような情報，いわゆる微分幾何の知識が必要になる．

一方，物理光学の場合には，波動の反射，透過現象を一度等価的な波源に置き換え，それらの和で近似表現する．したがって，幾何光学が微分（幾何）表現を用いるのに対し，対照的に物理光学では積分表現がかかわることが多い．物理光学近似については，後の4.3節でもう少し幾何光学的な手法との違いについて紹介する．

1.2 波動の散乱理論

波動の散乱理論は，電磁波より200年程前に音波について始まっている．波動一般の伝搬原理は，フェルマー (Fermat, P.)，そして直進性はホイヘンス (Huygens, C.) により既に17世紀に示されているが，いわゆるスカラー波動方程式を用いた波動の理論的な展開は，19世紀になってフレネル (Fresnel, A. J.)，ヘルムホルツ (Helmholtz, H.L.F.)，キルヒホッフ (Kirchhoff, G.) によって大きく飛躍した．

一方で光が電磁波であることを示したのは，マクスウェルであるが，光の伝搬理論や光学機械の発展は電磁波の理論とは別の形で発展してきたのは先に述べたとおりである．マクスウェルによって電磁波の存在が理論的に示され，電界と磁界が満足すべき式が，ベクトル波動方程式で表され，電磁波の伝搬，散乱理論は，微分方程式の解法や特殊関数の導出とともに発展してきた．

1881年にレイリー (Lord Rayleigh)¹ によって導体円柱による平面波の散乱解が，ベッセル関数と三角関数を用いた級数解で表すことが示されて以来，球，放物筒，円板，円孔，ストリップ等，各種の規範形状による電磁波の散乱解が求められている [1]．これらの解は，いわゆる変数分離法によって各座標成分に対する固有関数による級数展開による表現であり，波数 k が小さなときには級数の収束が速く，収束和を計算しやすい．しかしながら扱う物体が波長に比べて大きくなると，級数の収束が悪くなり精度が落ちる．

こうした波長に比べて大きな散乱体に対する散乱解の収束性の改善については，ワトソン変換と呼ばれる方法が考案されている．ワトソン (Watson, G. N.) は，地球の周りの電波伝搬を取り扱うために，地球を導体球で近似した上で，導体球近くの伝搬波の級数表現から積分表現を求め，その積分経路の変更により，被積分関数のもつ複素平面内の特異点における留数和表現を導出した．この新たな留数和表現は，個々の留数項が大地曲面に沿って伝搬するクレーピング波に対応していること，また元の級数表現と対照的な収束特性を持つこともわかっている．さらにワトソン変換途中の積分表示から鞍部点法を用いた漸近級数解を導出すれば，幾何光学的な反射波に対応する物理的な解釈が可能となることも示された．こう

¹本名は John William Strutt．爵位を得てレイリー卿，レイリー男爵，3rd Baron Rayleigh とも呼ばれる．

した幾何光学的な表現の導出によって、それまで各項を苦勞して計算して級数和を求めることなく、直観的で簡単な表現式が得られ、大きな散乱体の散乱解析もできるようになった。この表現の利点は、界表現から物理的な解釈が可能であり、現在のような高速、大容量の電子計算機のない時代に、数表と手回しの機械式の計算機で解析していた時には、非常に歓迎された。

1.3 幾何光学的回折理論の提唱

幾何光学的回折理論は、幾何光学波の考え方を回折波にも適用しようとしたものである。幾何光学波が散乱体表面で反射・透過する際に、満足するスネルの法則は、フェルマーの原理を基に導かれ、観測される界は伝搬径路に沿った位相、振幅の情報と、反射・透過近くの情報（例えば反射・透過点近くの境界面の曲率や媒質の電気定数）だけで計算できる。これは反射・透過が局所的な現象であることを示している。回折波に対しても、その伝搬径路が極値（停留値）をとると考えることによって回折点を決定し、回折波はその回折点からの放射として扱うことができる。

光学、音波等の分野では‘波動は波面の各点を点波源とする二次波の集合として表される’というホイヘンスの原理 (1690) が知られ、光の回折現象はフレネルによって開口部の二次波源の和をして表現された (1818)。さらにキルヒホッフは、等価波源の積分表示へと一般化している (1883)。この等価波源の表現は、後にキルヒホッフ近似 とか物理光学近似 とかいはわれるが、入射波を用いた散乱積分表現の導出に役立ち、この積分から導かれた高周波漸近解は、回折波の伝搬径路を示していた。幾何光学的回折理論の提唱者であるケラー (Keller, J. B.) は、こうした物理光学近似から導出した漸近界表現 [2, 3] と、ゾンマーフェルト (Sommerfeld, A. J. W.) が導出した半平板による光の回折波の厳密界表現 [4] や導体楔の回折界を基にして、回折波の表現法を一般化して Geometrical Theory of Diffraction (GTD) としてまとめた [5, 6, 7, 8]。

ケラーは、従来からあった幾何光学波の直進、反射、屈折に次いで、幾何光学的に回折波の考え方を拡張した。その際光は最小光路となるところを伝搬するというフェルマーの原理は、停留値をとる経路で進むと拡張して考えた [5]。彼は、ニューヨーク大学を 1943 年卒業し、その後プリンストン大学で一時期ソナーの研究をしていたが、その際に円板による音波の回折波の計算において、キルヒホッフ積分表現の二つの停留点における漸近評価と、同様な結果が幾何光学的な回折表現からも得られることを見つけた。その後ウェッジによるパルス波の回折の研究を行うに当たり、ルーネバークの幾何光学波の波数による逆べき級数展開を知り、同様な展開を回折波にも施した結果を 1953 年に発表した [8]。これが GTD の始まりであり、その物理的に明快で直観的な回折波の表現は、多くの研究者に受け入れられた。彼は、その後ニューヨーク大学のクーラン (Courant) 研究所において、

多くの研究者と共同で、さまざまな物体による散乱解析に対して GTD を適用している [9, 10] .

日本での紹介は、米国イリノイ大学で在外研究の機会を得た本郷が、電子通信学会（現在の電子情報通信学会）の会誌に海外研究動向として「エッジ回折の漸近解」として紹介したものが始めであろう [11] . GTD の日本語名である幾何光学的回折理論は、この文献中にも紹介されているウフimtsev (Ufimtsev, P. Y.) によって提唱された Physical Theory of Diffraction (PTD)[12] の日本語名である物理光学的回折理論とともに、本郷の命名による .

1.4 幾何光学的回折理論の展開

GTD の欠点といわれるのは、回折波を励振する入射波並びに表面反射波が幾何光学的な散乱体の形状により作られる影境界 (shadow boundary, SB) の近くで界が発散することである . この影境界に対して入射、反射波がある・ないという不連続が起こるため、この境界近くの遷移領域では界のふるまいが複雑になり、全体界を簡単な波数の逆べき級数の展開では表現できなくなるためである . 数学的には回折界のスペクトル積分表示において、被積分関数の特異点 (極) が幾何光学的界を、鞍部点 (停留点) が回折界をそれぞれ表しており、観測点が遷移領域にないときは、両者の寄与が孤立していると考えて分離して計算できる . しかし観測点が遷移領域にあるときは、特異点が近くにあることを考えた鞍部点法による近似計算が必要となる . この場合にはフレネル積分と呼ばれる特殊関数を使った一様漸近解の表現が必要となる . この一様漸近解の導出は、その回折波の積分表示からの導出の手法により異なる展開が存在する . 代表的な表現に Uniform Asymptotic Theory of Diffraction: UAT[13, 14, 15, 16] と Uniform Geometrical Theory of Diffraction: UTD[17, 18] がある .

UAT はボーズマ (Boersma, J.) , アルワリア (Ahluwalia, D. S.) , デシャン (Deschamps, G. A.) , リー (Lee, S. W.) らによって数学的には厳密な展開により求められる方法として提案されているが、その厳密性のゆえにやや応用性が狭い . UAT による導出の場合、結果として回折波の表現は GTD の表現を、また遷移領域においては入射波・反射波が発散する表現となり、遷移領域では両方が発散する特異性が相殺するように表現される .

これに対してクユムジャン (Kouyoumjian, R. G) とパスツク (Pathak, P. H.) によって提唱された UTD は入射・反射波の表現は影境界で不連続となるが、回折波にフレネル積分を使い遷移領域でも発散しない表現を用いて、最終的には回折波のみでも、入射・反射波を加えた合成界でも発散しない表現が得られている . その回折波の表現に用いたフレネル積分は、その引数が遷移領域からどのくらい観測点が遠いかを表す指標となっており、引数が大きくなるときはフレネル積分の漸近展開の初項から GTD の結果を得ることができる . この表現によると、数学的には高次項を含めた界が、厳密な漸近展開にはなっていないとの指摘はあるが、GTD の

回折係数を形式的に UTD のそれに置き換えて表現が可能であること、また入射波の種類（例えば平面波、円筒波、球面波等）が変わっても回折波が容易に表現できることから、数値計算に適した形をしており、広く用いられている。本書ではこうした一様漸近界の導出は紙面の都合上割愛し、考え方を紹介するのにとどめる。

1.5 本書の構成

以下に本書の構成について述べる。続く第 2 章では、波数 k を用いた漸近展開と呼ばれる級数展開について、その性質を調べる。この展開は波数 k が大きいとき、いわゆる高周波においては初項だけ、あるいは数項の和を用いるとかなり精度の高い近似となっているが、さらに項を加えていくと、正しい解から次第に離れ、発散する性質をもつ。この高周波漸近展開を得るために使われる鞍部点法と呼ばれる積分の近似解法について学ぶ。

第 3 章では、幾何光学について解説する。電磁波が満足するマクスウェルの方程式から、漸近展開を利用して高周波の電磁波が満足すべき近似式を求め、その初項が従来の幾何光学と呼ばれる光の性質と同様な性質をもち、光学の伝搬、反射、透過等の知識との関連で電磁界を表現する方法について調べる。続く第 4 章では GTD よりも歴史が古い物理光学（キルヒホッフ）近似について調べる。具体的に二次元導体楔による平面波の散乱について、等価電磁流からの放射積分の形で表された散乱界を定式化し、その積分表示から漸近解を導出することによって、幾何光学波や回折波の導出について考察する。

第 5, 6 章は、幾何光学を回折現象にも適用できるように拡張するために、厳密に解くことのできる基本形状である導体楔^{くまび}と導体円筒による電磁波の回折問題を調べる。第 7 章では、物理的に明解な解釈が可能な形で表現できる GTD の問題点について調べ、それらの解決法となり得る拡張された UTD、等価端部電磁流法や高次の回折波の表現について調べる。次にエッジ回折波、ならびに滑らかな表面回折波が、回折を起こす、その局所的な情報から求められることを示すことによって、ケラーの提唱した GTD の基本について考える。

第 8 章では、電磁波散乱や伝搬についての種々の問題に対して GTD を応用して適用した例について紹介し、本書の総括を第 9 章で行うことにする。また図 1.1 には、GTD の歴史に沿った本書の流れについて示した。

近年、GTD についての多くの文献が出版されているので、こうした文献も参考されたい [19]–[25]。本稿をまとめるにあたり、多くの文献を参考にさせていただいた。特に学生時代からお世話になった元静岡大学の本郷廣平先生からは正式に発表されていない先生の研究ノートや貴重な文献資料をいただいた。本書は、電子情報通信学会 アンテナ電波伝播研究会が主催する講習会のテキストのために書き下ろしたものである。この講習会の開催ならびにこのテキストの作成にあたり、宇野 亨 委員長とはじめとする実行委員会委員の方々には、いろいろなご意見をいただいた。ここに厚くお礼申し上げる。

以下，本文では，電気工学系の記述に倣い，虚数単位は j を，時間因子 $\exp(j\omega t)$ を用いる．

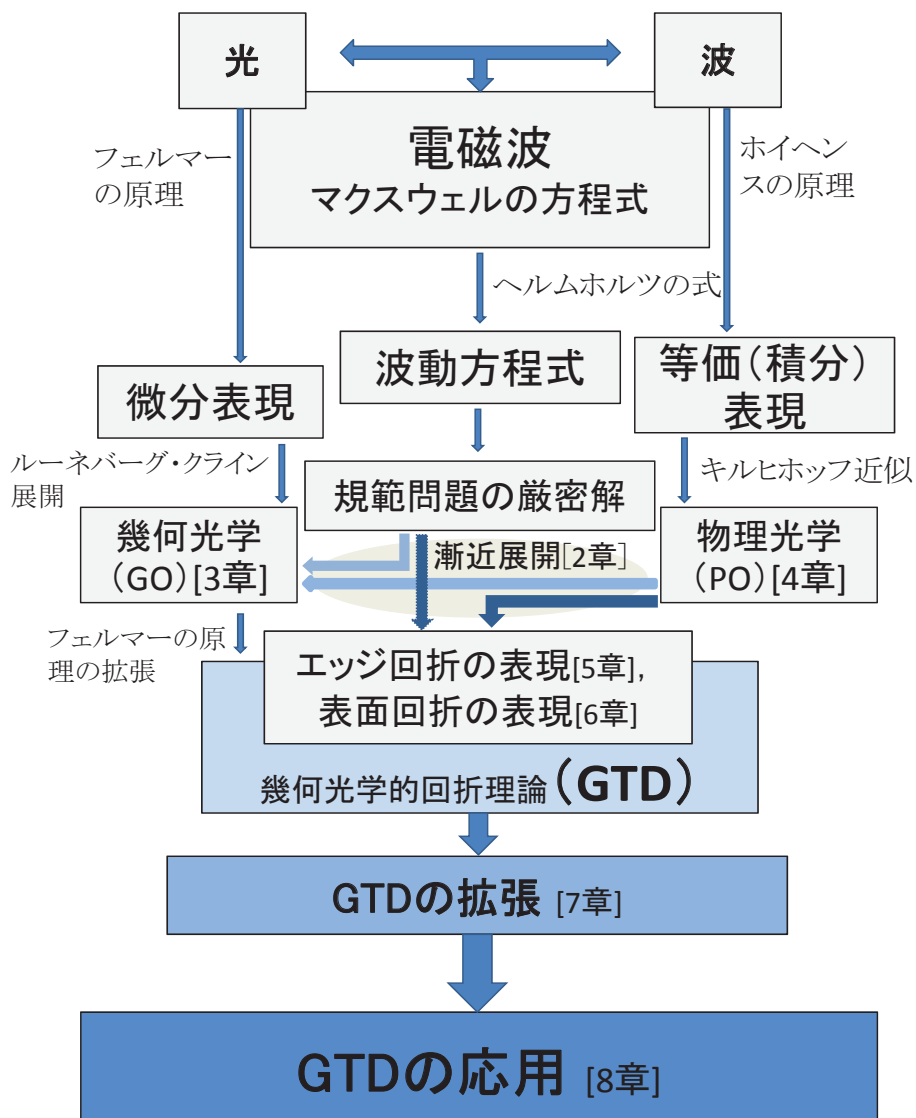


図 1.1: GTD の歴史に沿った本書の流れ