講演番号: 156

D－1

ジョルダン基底計算アルゴリズムの精度向上

An improvement of algorithm for solving Jordan problem

平松伸也　　桑島豊　　重原孝臣
Shinya HIRAMATSU　Yutaka KUWAJIMA　Takaomi SHIGEHARA
埼玉大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering, Saitama University

1. はじめに

所与の正方行列のジョルダン標準形 JCF およびジョルダン基底 JB を数値的に決定することは, 数値線形代数の分野において特に困難な課題の 1 つである．数値的に決定するアルゴリズムはいくつか存在するが, JCF, JB 共にユニタリー変換のみを用いて決定できるアルゴリズムがジョルダン基底計算アルゴリズム [1] である．また [1] には改良があり, 適切な前処理を加え精度向上を図った [2] がある。本稿では,[2](従来法) を改良し, ジョルダン基底計算においての計算精度向上について検討する.

2. アルゴリズム

ジョルダン基底計算アルゴリズム [1][2] では, ジョルダン基底を構築していく際に, 連鎖的に連立一次方程式が出現するが, その中に悪条件の連立一次方程式が存在した場合，精度低下が起きていた．そうした悪条件の連立一次方程式を, 連鎖的に出現する連立一次方程式の係数行列の積を利用することで良条件に近づけ, 精度向上を図るアルゴリズムを開発した. $J_l(\lambda)$ を固有値が λ でサイズ l のジョルダン細胞としたとき, 入力行列の JCF を $J_n(0)$ に限定した場合の改良したジョルダン基底計算アルゴリズム（提案法）を以下に示す. アルゴリズムの理論的側面は [1] を参照のこと.

提案法

入力:　JCF が $J_n(0)$ である冪零行列 $N \in \mathbf{C}^{n\times n}$

(1) $G^{(1)} = N$ とする.

(2) $k = 1, \ldots, n-1$ に対し特異値分解 $G^{(k)} = U^{(k)}\Sigma^{(k)}V^{(k)}$ を行ない，$I^{(k)} = U^{(k)}, S^{(k)} = \Sigma^{(k)}V^{(k)}$ とし，$G^{(k+1)} = S^{(k)}I^{(k)}$ を計算する．その時の最小特異値を 0 とみなす.

(3) この時, $G^{(n)}$ の零固有値に対応した JB は核 $\mathcal{N}(G^{(n)})$ の基底となるため, 容易に求められる.

(4) $G^{(n)}$ の JB から $G^{(1)}$ の JB まで延長する．このときの計算では下記のルーチンを呼び出し,$G^{(1)}$ の JB を求める.

出力: JCF，JB の組の候補を出力する.

ルーチン

入力:提案法の (3) で求めた基底 $x^{(n)}, S^{(i)}, (i = 1, \ldots, n-1), l = n-1$

$\{0,1\}^{l-1}$ の重複順列を $\{a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}\}$ とし，全ての場合について以下を行なう.

(1) $R = S^{(n-1)}$ とし $x = x^{(n)}$ とする

(2) $i = l-1, \ldots, 1$ に対し

$a_i = 0$ の場合，R に $S^{(i)}R$ を代入する

$a_i = 1$ の場合，$Ry = x$ を y について解き R に単位行列 E，x に y を代入する

(3) $a_1 = 0$ の場合 $Ry = x$ を y について解き x に y を代入する

(4) $x^{(1)}$ に x を代入する.

出力:全ての $x^{(1)}$ の中で精度が一番良いベクトル

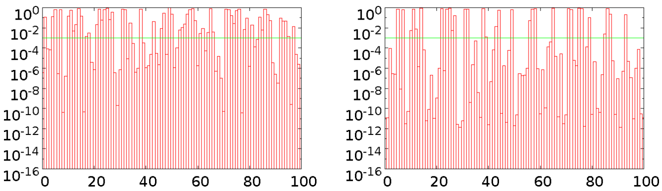

図 1: 従来法 (左), 提案法 (右) の計算精度. 縦軸は相対残差, 横軸は問題番号

3. 数値実験

本節では, 数値実験による従来法と提案法の精度の比較の方法と，その結果を記す．実験には，ジョルダン標準形 $J = J_{10}(0)$ を使う．また逆行列 P の各要素が [-1,1] の一様実数乱数で構成し, 悪条件化として P の列ベクトルのうちランダムに選択した二つをそれぞれ 10000 で割ることで小さいベクトルにする．これにより, 他のベクトルとの相対的な大小が生まれ, 計算により求めることが難しくなる．J を P によって相似変換し，得られた行列 $A = PJP^{-1}$ を 100 例生成し入力として用いた．その結果出力されたジョルダン基底から定まる変換行列 P' およびジョルダン標準形 J' について，相対残差 $||AP' - P'J'||_\infty/||AP'||_\infty$ による精度評価を行い, その結果を図 1 に示す．100 問中，期待された精度 (相対残差が 10^{-3}以下) に到達できたものは従来法では 55 例であり提案した手法では 74 例になり, 精度向上を確認できた.

参考文献

[1] K. Kudo, Y. Kakinuma, K. Hiraoka, H. Hashiguchi, Y. Kuwajima, T. Shigehara,“Algorithm for computing Jordan basis”, JSIAM Letters, 2, pp. 119–122 (2010).

[2] T.Matsumoto, K. Kudo, Y. Kuwajima, T. Shigehara, “Algorithm for solving Jordan problem of block Schur form”, JSIAM Letters, 4, pp. 9–12 (2012).