講演番号: 154

# クロネッカ基底計算アルゴリズムを用いた二つの二次曲面の交線の計算

D－1 Computation of intersection of two quadric surfaces by using an algorithm for computing Kronecker Basis

瀬下 史人 桑島 豊 重原 孝臣
Fumito SESHIMO Yutaka KUWAJIMA Takaomi SHIGEHARA
埼玉大学大学院理工学研究科
Graduate School of Science and Engineering, Saitama University

## 1. はじめに

本稿では、二つの平面代数曲線の交点計算を数値的に行うアルゴリズム[1]を、二つの二次曲面の交線を計算できるものへの拡張を試みた。

## 2. 三値固有値問題への変換

二次曲面の一般式は次のように表される。

$$p(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=a_{000}+a_{100}\lambda_1+a_{010}\lambda_2+a_{001}\lambda_3+a_{200}\lambda_1^2$$
$$+a_{110}\lambda_1\lambda_2+a_{101}\lambda_1\lambda_3+a_{020}\lambda_2^2+a_{011}\lambda_2\lambda_3+a_{002}\lambda_3^2=0$$

次の適切な四次行列$A,B,C,D$および非零ベクトル$x$を用いることで、次のような方程式に変換することができる。

$$(A+\lambda_1 B+\lambda_2 C+\lambda_3 D)x=0$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{000} & a_{100} & a_{010} & a_{001} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & a_{200} & a_{110} & a_{101} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{020} & a_{011} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{002} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

このときの$x$は$x=(1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T$である。

二つの二次曲面の交線を求める際、変数三つに対して与式が二つという問題が生じる。これを解消するため、二次曲面の係数がすべて零というような自明な恒等式$0=0$を加える。これらの式を三値固有値問題へと変換する。

$$(A_i+\lambda_1 B_i+\lambda_2 C_i+\lambda_3 D_i)x_i=0\ (i=1,2,3)$$

ここで、$x_i=(1,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)^T$ である。

## 3. 一般固有値問題への帰着

先の節で求められた三値固有値問題は、次に示す手法で $n=4^3$ 次の三つの一般固有値問題へと帰着される。

$$\Delta_1 w=\lambda_1\Delta_0 w, \Delta_2 w=\lambda_2\Delta_0 w, \Delta_3 w=\lambda_3\Delta_0 w$$
$$w=x_1\otimes x_2\otimes x_3$$
$$\Delta_0=B_1\otimes C_2\otimes D_3-B_1\otimes D_2\otimes C_3+D_1\otimes B_2\otimes C_3$$
$$-C_1\otimes B_2\otimes D_3+C_1\otimes D_2\otimes B_3-D_1\otimes C_2\otimes B_3$$
$$\Delta_1=-A_1\otimes C_2\otimes D_3+A_1\otimes D_2\otimes C_3-D_1\otimes A_2\otimes C_3$$
$$+C_1\otimes A_2\otimes D_3-C_1\otimes D_2\otimes A_3+D_1\otimes C_2\otimes A_3$$
$$\Delta_2=-A_1\otimes D_2\otimes B_3+A_1\otimes B_2\otimes D_3-B_1\otimes A_2\otimes D_3$$
$$+D_1\otimes A_2\otimes B_3-D_1\otimes B_2\otimes A_3+B_1\otimes D_2\otimes A_3$$
$$\Delta_3=-A_1\otimes B_2\otimes C_3+A_1\otimes C_2\otimes B_3-C_1\otimes A_2\otimes B_3$$
$$+B_1\otimes A_2\otimes C_3-B_1\otimes C_2\otimes A_3+C_1\otimes B_2\otimes A_3$$

上記三つの一般固有値問題において、共通の固有ベクトル $w$ を持つような固有値の組を求めることにより、交線を求めることができる。

ここで、$\Delta_0$ は問題の設定上必ず特異行列であり、QZ 法などの標準的な解法では解くことができない。そのため、行列束$\Delta_i-\lambda_i\Delta_0\ (i=1,2,3)$ に対してクロネッカ基底計算アルゴリズム[2]を用いてクロネッカ標準形並びに基底を求めることで、この一般固有値問題を解く。

## 4. 固有空間比較による多項式解の導出

$\Delta_i-\lambda_i\Delta_0\ (i=1,2,3)$の固有空間の全てに、$w$が含まれるような$\lambda_i$ の組の集合が求める交線である。

任意の$\lambda_i\ (i=1,2,3)$ について、$\Delta_i-\lambda_i\Delta_0$ の固有空間の基底を$v_i^k(\lambda_i)$ $k=1,\cdots,k_j$ とする。$k_j$ は固有空間の次元である。このとき、$v_i^k(\lambda)$ は$\lambda$についての多項式を要素にもつベクトルである。 $v_i^k(\lambda_i)$ の線形結合で$w$が表現されるための必要十分条件は、$V_i=(v_i^k(\lambda_i))$ としたとき、$rankV_i=rank(V_i,w)$である。$V_i$が列フルランクなので、$V_i$ に対し行に関する基本変形を用いることで上三角行列に変換し、その変換を$w$にも施したベクトルの下から $n-k_j$ 成分が全て0であれば、この条件が満たされる。したがって、こうして得られた多項式群の内、全ての $\lambda_i$ から共通して得られる多項式が交線を表す。そして、与えられた二つの曲面式を実際に割ってみることで、割り切れれば求める解となる。

## 5. 数値実験

次のような2つの二次曲面を入力として、この交線を数値実験により求めた。

$$p_1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)=0$$
$$p_2(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3)=0$$

各一般固有値問題より $\lambda_1+\lambda_2+\mathrm{O}(10^{-13})=0$ が得られた。ただし、$\mathrm{O}(\varepsilon)$は係数が$\varepsilon$程度の多項式を表す。

以上から、共通因子である$\lambda_1+\lambda_2=0$が得られた。

## 参考文献

[1] A. Muhič, B. Plestenjak, “On the quadratic two-parameter eigenvalue problem and its linearization”,Linear Algebra Appl. 432, pp.2529-2542, 2010.
[2] Y. Kakinuma, et al., “Algorithm for computing Kronecker basis”, JSIAM Letters, Vol. 1, pp.60-63, 2009.


Copyright © 2016 IEICE