

GPUを用いた2次元定常熱伝導方程式の数値計算高速化

Fast Numerical Calculation of Steady State Heat Equation by Graphics Processing Unit

高田 直樹†
Naoki Takada滝沢 努‡
Tsutomu Takizawa増田 信之‡
Nobuyuki Masuda伊藤 智義‡
Tomoyoshi Ito

1. まえがき

近年、コンピュータグラフィックス(CG)処理用のプロセッサであるGPU(Graphics Processing Unit)の性能は著しく向上している。GPUは内部にシェーディング処理を行うパイプラインを持ち並列処理が可能である。GPUの演算性能及びコストパフォーマンスはCPUに比べ格段に優れている。GPUに搭載されたシェーダはプログラム可能であり、単精度浮動小数点演算を行うことができる。GPUを用いてCG処理以外の汎用的な数値計算を高速化させる研究は、GPGPU(General Purpose on GPU)と呼ばれており最近盛んに行われている[1][2][3]。

2次元定常熱伝導方程式の数値計算を行う専用計算機のアーキテクチャが提案されている[4]。FPGAに実装し、専用計算機の妥当性が示されている。このアーキテクチャを基に、パイプライン数を増やせば計算高速化されることになる。

本研究では、GPUを用いて2次元定常熱伝導方程式の数値計算を実装し並列計算を行った。GPUとしてNVIDIA社製のGeforce8800 GTXを使用した。CG処理のテクスチャを用いて2次元空間に対する温度配列をGPUに割り当て並列計算を行った。開発環境として、DirectX 10と上位レベルシェーダ言語(HLSL)を使用した。その結果、CPUのみで計算した場合に比べ、約15倍の計算高速化が達成された。

2. 2次元定常熱伝導方程式の数値解法

2次元熱伝導方程式は次式となる。

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q \quad (1)$$

ここで、 T は温度、 λ は熱伝導率、 ρ は密度、 c は比熱、 Q は外部から与えられた熱量を示す。

定常な場合、温度の時間変化は一定となることから、式(1)は次式となる。

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + Q = 0 \quad (2)$$

式(2)に中心差分を適用し、 x, y 方向の空間離散間隔を h とすると、2次元定常熱伝導方程式の差分式は次式となる。

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left(T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n + \frac{Qh^2}{\lambda} \right) \quad (3)$$

式(3)において、求める温度は $T_{i,j}$ である。数値解を求めるのに次式を用いる。

$$T_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \left(T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n + \frac{Qh^2}{\lambda} \right) \quad (4)$$

式(4)の差分計算を計算領域の全離散点について行う。収束解を求めるために、各離散点において、式(4)の差分計算を繰り返す。 n は、式(4)の差分計算の繰り返し回数を示す。これにより、収束した解が定常解となる。

3. GPUを用いた定常熱伝導方程式の数値計算

3.1 定常熱伝導方程式の数値計算の実装

GPUを用いた定常熱伝導方程式の数値計算フローチャートを図1に示す。CPUにおいて、計算領域の温度配列をCG処理で使用するテクスチャに割り当てる。テクスチャをGPUに転送し、 n 回目の式(4)の差分計算で求められた温度配列データは、GPUを搭載したグラフィックボード上のビデオメモリのテクスチャバッファに格納される。シェーダ・プログラムにより、テクスチャバッファに格納された温度配列を用いて $n+1$ 回目の式(4)の差分計算がGPU内で行われる。この計算結果である温度配列データをテクスチャを用いてCPUに戻す。これを繰り返し熱伝導方程式の定常解を求める。

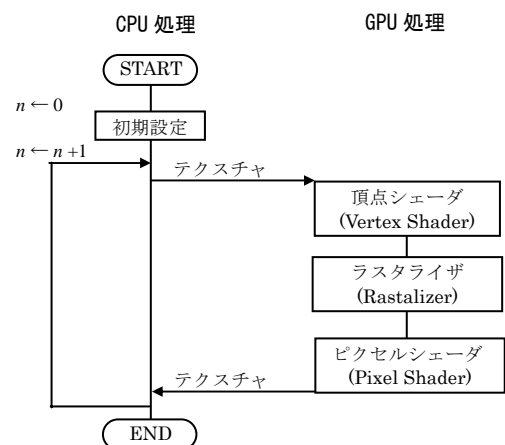


図1 GPUを用いた本数値計算のフローチャート

3.2 シェーダ・プログラミング

GPUに2次元定常熱伝導方程式の差分計算(式(4))を実装する手順を図2に示す。最初に、頂点シェーダにおいて、4つの頂点をスクリーンの端にくるようにセットする。こ

†湘北短期大学情報メディア学科

‡千葉大学大学院工学研究科

の頂点は、2次元の計算領域の頂点となる。次に、ラスライザの自動補間機能を用いて、四角形ポリゴンを描画する命令を与え、その頂点に囲まれたピクセルが生成される。その後、ピクセルシェーダにおいて、補間されたテクスチャ座標データを、熱伝導数値計算で用いる温度配列の座標データとして利用し、式(4)の差分計算を行う。

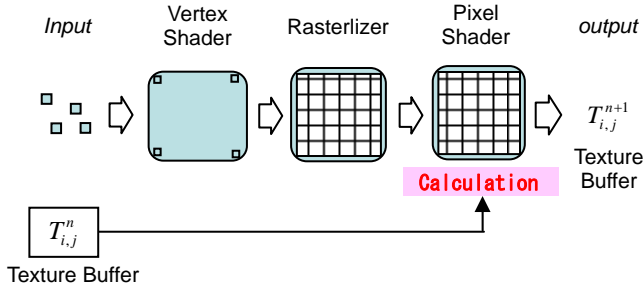


図2 GPUにおける定常熱伝導方程式の差分計算の実装

ピクセルシェーダのプログラムは、次のようになる。

```
float4 PS0 (VS_OUTPUT0 In) : COLOR
{
    float4 T;
    float h=1.0f/512, H=h*h;
    float4 t1 = tex2D(temp1_Samp, In.Tex0 + float2(invTexSize, 0.0f));
    float4 t2 = tex2D(temp1_Samp, In.Tex0 + float2(-invTexSize, 0.0f));
    float4 t3 = tex2D(temp1_Samp, In.Tex0 + float2(0.0f, -invTexSize));
    float4 t4 = tex2D(temp1_Samp, In.Tex0 + float2(0.0f, invTexSize));
    if (In.Tex0.x == 0.5 && In.Tex0.y == 0.5){
        T.r = 1.0f;
        T.b = 1.0f;
        T.g = 1.0f;
    }else{
        T = float4((t1.xyz + t2.xyz + t3.xyz + t4.xyz)/4+Q*H/4, 1.0);
    }
    return T;
}
```

4. 数値計算モデル

数値計算モデルを図3に示す。計算領域を 512×512 とした。その中心の座標(256, 256)に温度一定な熱源 Q=1.0を配置した。計算領域の終端の境界条件にディリクレ条件 (温度:T=0)を与えた。式(4)を図3の全計算領域に適用し、この差分計算を繰り返すことにより、定常解を求めた。

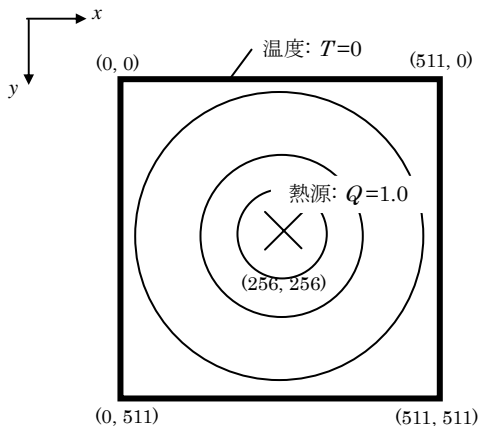


図3 数値計算モデル

5. 結果

計算領域 512×512 において、式(4)の差分計算を 10万回繰り返し、その計算時間を測定した。CPU 単独での計算時間 (SSE 命令を使用) と、本手法による GPU を用いた計算時間を比較した。その結果を表1に示す。

CPU: Intel Pentium 4 3.6-GHz, Memory: 2GB
OS: Windows XP
Driver: NVIDIA 169.21
Compiler: Microsoft Visual Studio 2005 (option -O2)
GPU: NVIDIA Geforce 8800 GTX
(Stream processors:128, Shader Clock:1.35-GHz)
Graphics API: Directx10, Shading language: HLSL

表1 CPU 計算と GPU 計算の比較

CPU (秒)	GPU (秒)	速度比
204	13.5	15.1

本手法による GPU を用いた計算では、CPU 単独で計算した場合に比べ、約 15 倍計算高速化された。10 万回差分計算を繰り返したあとの CPU 単独で計算した結果と GPU を用いて計算した結果を比較したところ、GPU を用いた計算は、単精度を保持していることが確認された。

6. まとめ

CG 処理を用いて、2次元熱伝導方程式の数値解法を GPU に実装した。その結果、CPU 単独の計算と比べ、約 15 倍の計算高速化を実現することができ本手法の有効性が示された。また、CPU 単独の計算結果と比較したところ、本手法は単精度を保持していることが確認された。これにより、本手法による GPU を用いた定常熱伝導方程式の数値計算は、単に高速化するだけではなく、科学技術計算として利用できることが示された。

謝辞

本研究の一部は、文部科学省科学研究費補助金若手研究 (B) (課題番号 20700053) による。

参考文献

- [1] N. Masuda, T. Ito, T. Tanaka, A. Shiraki and T. Sugie, "Computer generated holography using a graphics processing unit", Optics Express, Vol.14, No.2, pp.587-592, 2006.
- [2] 下馬場朋禄, 伊藤智義, 杉江崇繁, 増田信之, 阿部幸男, 白木厚司, 市橋保之, 高田直樹, "統合型シェーダを搭載した GPU によるフレネル回折積分の高速化", 信学論 (D), Vol. J90-D, No. 9, pp.2656-2658, 2007.
- [3] N. Takada, N. Masuda, T. Tanaka, Y. Abe and T. Ito, "A GPU implementation of the 2-D finite-difference time-domain code using High Level Shader Language", Appl. Comput. Electromagn. Soc. J., in print.
- [4] 佐竹信一, 廣井義明, 増田信之, 伊藤智義, "プログラミング可能な LSI による二次元定常熱伝導シミュレータ", Thermal Science & Engineering, Vol.15, No.2, pp.85-90, 2007.