

線形半無限計画法による通過域平坦阻止域等リプル振幅特性をもつ 安定な平坦群遅延 IIR フィルタの最適設計

Optimal Design of Stable Flat Delay IIR Filters with
Flat Passband and Equiripple Stopband Magnitude Responses
using Linear Semi-Infinite Programming Method

松本 拓也 † 陶山 健仁 †
Takuya Matsumoto Kenji Suyama

1 まえがき

デジタルフィルタ [1] は、通信、画像処理などの幅広い分野で利用されている信号処理回路である。波形保存が要求される応用では、信号が通過する通過域において減衰がなく一定であり、かつ平坦群遅延特性、つまり直線位相特性を有するフィルタが望まれる。

デジタルフィルタは、インパルス応答が有限長の FIR (Finite Impulse Response) フィルタと、無限長の IIR (Infinite Impulse Response) フィルタに分類される。FIR フィルタは安定性が保証されており、完全直線位相特性を容易に実現することができる。しかし、その位相特性はフィルタ次数によって一意に決まり、急しゅんな振幅特性を得るためには高次数が必要であるため、遅延時間が大きくなるという問題がある。一方、IIR フィルタは、FIR フィルタと同程度の周波数特性を低次数で実現できる。しかしながら、IIR フィルタはその回路構成上、安定性が保証されておらず、また、完全直線位相特性は実現不可能であるため、通過域において直線位相特性を近似設計する試みがなされてきた [2]-[5]。一方、我々は線形半無限計画法を用いた安定な IIR フィルタの複素チェビシェフ近似設計について検討してきた [6]。この手法は、設計対象となるフィルタの条件を制約条件として付加することができれば、同一の枠組みで設計可能な手法である。

本論文では、通過域平坦阻止域等リプル振幅特性をもつ平坦群遅延 IIR フィルタの設計について考える。平坦特性を考慮したフィルタ設計の従来法として、文献 [2] では、通過域平坦阻止域等リプル振幅特性を有する IIR フィ

ルタの設計法が提案されている。しかし、この設計法は振幅特性のみ平坦化を行っており、群遅延特性については考慮されていない。文献 [4] では、分母多項式で通過域の群遅延特性を最大平坦化してから、対称な分子多項式を用いることで振幅特性の近似を行っている。文献 [3] では、阻止域平坦通過域等リプル IIR フィルタを設計し、遅延器と並列接続することで、近似的に直線位相特性を有するチェビシェフ型 IIR フィルタを設計する手法が提案されているが、得られる群遅延は整数に限定される。また、文献 [5] では、通過域における振幅特性と群遅延特性に平坦条件を与え、阻止域に Remez アルゴリズムを適用し、繰り返し一般化固有値問題を解くことで設計する手法が提案されている。しかし、この設計法では安定性を考慮しておらず、また、Remez アルゴリズムを適用する前に阻止域に適当な零点を配置して初期値を求めているため、アルゴリズムは初期値に依存する。

本研究では、まず、阻止域等リプル振幅特性を実現するため、阻止域における IIR フィルタの複素近似設計問題を線形半無限計画問題として定式化する。このとき、設計問題に対する制約条件として、通過域における振幅特性と群遅延特性の平坦条件、フィルタの安定性を保証する条件を付加する。これにより、通過域における平坦振幅特性と平坦群遅延特性を実現し、IIR フィルタの安定性も考慮する。そして最後に、定式化した設計問題に対し、線形半無限計画法の 1 手法である 3 段階法 [6] を用いることで最適設計を行う手法を提案する。3 段階法は、有効な制約条件の選択、隣り合って有効となった制約条件の統合、最適性条件である KKT (Karush-Kuhn-Tucker) 条件に基づく制約条件の調整により最適解を算出する手法であり、これにより、通過域平坦阻止域等リプル振幅特性

† 東京電機大学工学部電気電子工学科,
School of Engineering, Tokyo Denki University

をもつ安定な平坦群遅延 IIR フィルタの最適設計を行う。設計例により、提案法の有効性を示す。

2 IIR フィルタの複素近似設計問題

本章では、阻止域等リプル振幅特性を有する IIR フィルタの最大誤差最小化基準による複素近似設計問題についてまとめる。

IIR フィルタの入出力関係は次式で表せる。

$$y(k) = \sum_{n=0}^N a_n x(k-n) - \sum_{m=1}^M b_m y(k-m) \quad (1)$$

ここで、 $x(k)$ 、 $y(k)$ はそれぞれフィルタの入力信号と出力信号であり、 a_n 、 b_m はフィルタ係数、 N 、 M はフィルタ次数である。(1) 式を z 変換して得られる IIR フィルタの伝達関数は次式となる。

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{n=0}^N a_n z^{-n}}{1 + \sum_{m=1}^M b_m z^{-m}} \quad (2)$$

$H(z)$ に対して、 $z = e^{j\omega}$ として得られる周波数特性を $H(\omega)$ 、所望特性を $D(\omega)$ とすると、最大誤差最小化基準による IIR フィルタの複素近似設計問題は、 $H(\omega)$ による $D(\omega)$ の複素チェビシェフ近似問題となり、次式で表される。

$$\min_{\substack{a_0, \dots, a_N \\ b_1, \dots, b_M}} \max_{\omega \in \Omega} W(\omega) |H(\omega) - D(\omega)| \quad (3)$$

ここで、 Ω は近似帯域、 $W(\omega)$ は重み関数である。

3 半無限計画問題への定式化

本章では、(3) 式の問題を半無限計画問題へ定式化する。

(3) 式において、 $H(\omega)$ は有理関数であるため、このままでは扱いづらい。そこで、所望特性を $D(\omega)B(\omega)$ として、 $A(\omega)$ で近似する問題へと書き換える。

$$\min_{\substack{a_0, \dots, a_N \\ b_1, \dots, b_M}} \max_{\omega \in \Omega} \frac{W(\omega)}{|B(\omega)|} |A(\omega) - D(\omega)B(\omega)| \quad (4)$$

次に、複素領域における最小化問題である (4) 式を、実回転定理 [7] を用いて実領域の最小化問題に変換する。実回転定理は、ある複素数 $z = x + jy$ に対して回転パラメータ r を与えたとき、その大きさ $|z|$ が次式で算出可能であることを示す定理である。

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \max_{r \in \Phi} \operatorname{Re} \{ z e^{jr} \} \quad (5)$$

ここで、 $\Phi = [0, 2\pi)$ である。

実回転定理を (4) 式に適用すると、

$$\min_{\substack{a_0, \dots, a_N \\ b_1, \dots, b_M}} \max_{\substack{\omega \in \Omega \\ r \in \Phi}} \frac{W(\omega)}{|B(\omega)|} \operatorname{Re} \{ (A(\omega) - D(\omega)B(\omega)) e^{jr} \} \quad (6)$$

となる。(6) 式は、最大誤差を δ とおくことで、次式の制約付最小化問題に書き直すことができる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta \\ \text{sub.to} \quad & \frac{W(\omega)}{|B(\omega)|} \operatorname{Re} \{ (A(\omega) - D(\omega)B(\omega)) e^{jr} \} \leq \delta \\ & (\omega, r) \in (\Omega, \Phi) \end{aligned} \quad (7)$$

このとき、低域通過フィルタの設計を考えると、所望特性 $D(\omega)$ は、

$$D(\omega) = \begin{cases} e^{-j\tau_d \omega} & , 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ 0 & , \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (8)$$

であり、 τ_d は所望群遅延、 ω_p 、 ω_s はそれぞれ通過域、阻止域カットオフ周波数である。ここで、本設計では阻止域でのみ等リプル振幅特性を有することを目指しており、通過域の周波数特性については、通過域における振幅特性と群遅延特性の平坦条件によって規定する。したがって、(7) 式における近似帯域 Ω は阻止域のみを考えればよく、(8) 式より、阻止域の所望特性は 0 であるため、(7) 式は以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta \\ \text{sub.to} \quad & \frac{W(\omega)}{|B(\omega)|} \operatorname{Re} \{ A(\omega) e^{jr} \} \leq \delta \\ & (\omega, r) \in (\Omega, \Phi) \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 $\Omega = [\omega_s, \pi)$ である。

4 通過域の平坦条件

本章では、通過域における振幅特性と群遅延特性の平坦条件の定式化を行う。

通過域振幅特性の平坦条件は、次式で与えられる。

$$\left. \frac{\partial^i |H(\omega)|}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=\omega_{p0}} = \begin{cases} 1 & (i=0) \\ 0 & (i=1, 2, \dots, K_m-1) \end{cases} \quad (10)$$

ここで、 ω_{p0} は通過域上の周波数点であり、 K_m は振幅特性の平坦度である。また、通過域群遅延特性 $\tau(\omega)$ の平坦条件は、次式で与えられる。

$$\left. \frac{\partial^i \tau(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=\omega_{p0}} = \begin{cases} \tau_d & (i=0) \\ 0 & (i=1, 2, \dots, K_g-2) \end{cases} \quad (11)$$

ここで、 K_g は群遅延特性の平坦度である。以降は、フィルタ係数に関する線形方程式を導出するため、平坦度を $K = K_m = K_g$ と限定する。

このとき、低域通過フィルタの設計を考えた場合、通過域における振幅特性と群遅延特性の平坦条件は次式で表される [5].

$$\left. \frac{\partial^i H(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=0} = \begin{cases} 1 & (i = 0) \\ 0 & (i = 1, 2, \dots, K-1) \end{cases} \quad (12)$$

(12) 式より,

$$\left. \frac{\partial^i A(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=0} = \left. \frac{\partial^i B(\omega)}{\partial \omega^i} \right|_{\omega=0} \quad (13)$$

が導かれ [4], 以下の K 個の線形方程式が得られる.

$$\sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_d)^i - \sum_{m=0}^M b_m m^i = 0 \quad (14)$$

ただし, $i = 0, 1, \dots, K-1$ である.

(14) 式を (9) 式の設計問題における制約条件として付加し, 通過域における振幅特性と群遅延特性の平坦化を行うが, (14) 式は等式制約であるため, 次式のような不等式制約として付加する.

$$\sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_d)^i - \sum_{m=0}^M b_m m^i \geq 0 \quad (15)$$

$$-\sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_d)^i + \sum_{m=0}^M b_m m^i \geq 0 \quad (16)$$

5 IIR フィルタの安定条件

本章では, IIR フィルタの安定条件について考える.

IIR フィルタは安定性を考慮する必要がある, そのため, 安定条件を制約条件として設計問題に組み込む必要がある. 安定な IIR フィルタの必要十分条件は, その全ての極が z 平面上の単位円内に存在することであるが, この条件はフィルタ係数に対して非線形な条件となる.

本研究では, 十分条件ではあるがフィルタ係数に対して線形な条件である正実性 [8] を用いる. 正実性は, IIR フィルタの分母周波数特性 $B(\omega)$ に対し, 次式で定義される.

$$\operatorname{Re}\{B(\omega')\} \geq \varepsilon \quad \omega' \in \Omega' \quad (17)$$

ここで, $\Omega' = [0, \pi]$ であり, 安定性は近似帯域以外でも満たす必要があるため, Ω' と Ω は異なる. また, ε は正の微小値である.

(17) 式を (9) 式の設計問題における制約条件として付加することで, 設計する IIR フィルタの安定性を保証する.

6 線形半無限計画法による IIR フィルタの最適設計

本章では, まず, 定式化した設計問題と制約条件をまとめ, 次に, その問題に対して線形半無限計画法の 1 手法である 3 段階法を用いた最適設計を行う手法について述べる.

6.1 IIR フィルタの設計問題

通過域平坦阻止域等リプル振幅特性をもつ安定な平坦群遅延 IIR フィルタの設計問題は, (9) 式に, 制約条件として (15) 式, (16) 式, (17) 式を付加し, 次式の半無限計画問題の主問題として定式化できる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \delta \\ \text{sub.to} \quad & \frac{|B(\omega)|}{W(\omega)} \delta + \sum_{n=0}^N a_n \cos(n\omega - r) \geq 0, \\ & \sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_d)^i - \sum_{m=0}^M b_m m^i \geq 0, \\ & -\sum_{n=0}^N a_n (n - \tau_d)^i + \sum_{m=0}^M b_m m^i \geq 0, \\ & \sum_{m=1}^M b_m \cos m\omega' \geq \varepsilon - 1, \\ & (\omega, r, \omega') \in (\Omega, \Phi, \Omega') \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned} \quad (18)$$

また, (18) 式は次のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{sub.to} \quad & \mathbf{a}_1^T(\omega, r) \mathbf{x} \geq 0, \\ & \mathbf{a}_2^T(i) \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_1, \\ & \mathbf{a}_3^T(i) \mathbf{x} \geq \mathbf{b}_2, \\ & \mathbf{a}_4^T(\omega') \mathbf{x} \geq \varepsilon - 1, \\ & (\omega, r, \omega') \in (\Omega, \Phi, \Omega') \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \end{aligned} \quad (19)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [\delta, a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_M]^T \\ \mathbf{a}_1(\omega, r) &= \left[\frac{|B(\omega)|}{W(\omega)}, \cos(-r), \dots, \cos(N\omega - r), 0, \dots, 0 \right]^T \\ \mathbf{a}_2(i) &= [0, (-\tau_d)^i, \dots, (N - \tau_d)^i, -1^i, \dots, -M^i]^T \\ \mathbf{a}_3(i) &= [0, -(-\tau_d)^i, \dots, -(N - \tau_d)^i, 1^i, \dots, M^i]^T \\ \mathbf{a}_4(\omega') &= [0, \underbrace{0, \dots, 0}_{N+1}, \cos \omega', \dots, \cos M\omega']^T \\ \mathbf{b}_1(i) &= [1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N+1}]^T \\ \mathbf{b}_2(i) &= [-1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N+1}]^T \\ \mathbf{c} &= [1, \underbrace{0, \dots, 0}_{N+M+1}]^T \end{aligned}$$

とおいた. また, 一般的な最適化問題では主問題よりも双対問題を扱ったほうが, 制約条件の数を変数の個数ま

で抑えることができ、問題を解く際の計算量を軽減できる。そこで、(19)式に対する双対問題を考えると、

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \sum_{i=0}^{K-1} b_1(i)y_2(i) + \sum_{i=0}^{K-1} b_2(i)y_3(i) \\
 & + \sum_{\omega' \in \Omega'} (\varepsilon - 1)y_4(\omega') \\
 \text{sub.to} \quad & \sum_{(\omega, r) \in (\Omega, \Phi)} \mathbf{a}_1(\omega, r)y_1(\omega, r) \\
 & + \sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{a}_2(i)y_2(i) \\
 & + \sum_{i=0}^{K-1} \mathbf{a}_3(i)y_3(i) \\
 & + \sum_{\omega' \in \Omega'} \mathbf{a}_4(\omega')y_4(\omega') = \mathbf{c}, \\
 & y_1(\omega, r) \geq 0, \quad y_2(i) \geq 0, \\
 & y_3(i) \geq 0, \quad y_4(\omega') \geq 0, \\
 & (\omega, r, \omega') \in (\Omega, \Phi, \Omega') \quad i = 0, 1, \dots, K-1
 \end{aligned} \tag{20}$$

となる。ここで、 $y_1(\omega, r), y_2(i), y_3(i), y_4(\omega')$ は双対変数である。

6.2 3段階法による設計

(20)式を線形化し、線形半無限計画法の1手法である3段階法を用いて解く[6]。3段階法は、有効な制約条件の選択、隣り合って有効となった制約条件の統合、最適性条件に基づく制約条件の調整の3段階操作により、最適解を算出する方法であり、これにより最適設計を行う。

6.3 設計手順

本研究で提案する3段階法によるIIRフィルタの設計手順を以下に示す。

1. 分母フィルタ次数 M , 分子フィルタ次数 N , 平坦度パラメータ K , 周波数分割数 S , 回転パラメータ分割数 T , 安定制約用の周波数分割数 U , 所望群遅延 τ_d , 阻止域カットオフ周波数 ω_s , 正の微小値であるパラメータ ε を与える。また、 $|B(\omega)| = 1$ とする。
2. 連続パラメータを離散化した(20)式をシンプレックス法[9]で解く。
3. 2.で得られた b_m を用い $|B(\omega)|$ を更新し、2.へ戻る。ただし、 b_m が十分収束した場合は3.へ進む。
4. 選択操作で得られた解より、制約条件が隣り合うか否かを調べ、算術平均により統合する。
5. ニュートン法[10]により、KKT条件に基づく非線形連立方程式を解く。

ここで、1.~3.が選択操作、4.が統合操作、5.が調整操作に相当する。

7 設計例

提案法の有効性を確認するために、設計例を示す。ここで、 $S = 200, T = 20, U = 200, \varepsilon = 0.01$ とし、所望特性は(8)式の通りである。なお、設計例は 2π を1とした正規化周波数として示すため、以降は通過域、阻止域カットオフ周波数を f_p, f_s と表記する。

7.1 設計例1

設計例1として、 $N = 12, M = 5, K = 10, \tau_d = 9, f_p = 0.25$, 全帯域で重み1の低域通過フィルタを設計し、安定制約を付加せずに設計したものと比較する。

図1に振幅特性、図2に通過域付近の振幅特性、図3に通過域付近の群遅延特性、図4に極配置を示す。

この設計は、CPU Pentium4 2.40GHz, メモリ1GB搭載のPCで約2.7[s]で完了した。設計結果より、最大誤差は、安定制約を付加した設計で $\delta = 9.95 \times 10^{-3}(-40.04[\text{dB}])$ となり、安定制約を付加していない設計では、 $\delta = 8.34 \times 10^{-3}(-41.57[\text{dB}])$ であった。また、図1より阻止域で等リプル振幅特性、図2より通過域で平坦振幅特性、図3より通過域で平坦群遅延特性が得られていることを確認できる。さらに、最大極半径は、安定制約を付加した設計で $\rho = 0.863$, 安定制約を付加していない設計で $\rho = 0.847$ となり、図4からも設計したフィルタは安定であることが確認できる。

図1より、安定制約を付加していない設計と比べ、安定制約を付加した提案法では、最大誤差は大きくなったものの、通過域が広がり、より急しゅんな特性を得ることに成功している。安定制約を付加しない場合、平坦条件の等式制約のもと最大誤差制約のみで拘束されるため、極配置とは無関係に δ を小さくする。これにより通過域がゆるやかになったと考えられる。一方、安定制約を付加した場合は、可能な範囲で極を単位円に近づけるため、遮断特性が急しゅんになるが、その一方で δ がわずかに大きくなったと考えられる。

7.2 設計例2

設計例2では、安定制約の有効性を確認するため、最大極半径が単位円付近となる場合の設計例を示す。設計条件は、 $N = 12, M = 5, K = 10, \tau_d = 6.8, f_p = 0.25$ であり、全体域で重み1の低域通過フィルタを設計し、安定制約を付加せずに設計したものと比較する。

図5に振幅特性、図6に通過域付近の振幅特性、図7に通過域付近の群遅延特性、図8に極配置を示す。

この設計は、設計例1と同様のPCで約3.2[s]で完了

した。設計結果より、安定制約を付加した設計では、 $\delta = 6.24 \times 10^{-2} (-24.08[\text{dB}])$ 、 $\rho = 0.937$ となり、安定制約を付加していない設計では、 $\delta = 6.08 \times 10^{-2} (-24.33[\text{dB}])$ 、 $\rho = 0.959$ であった。安定制約を付加していない設計と比べ、安定制約を付加した提案法では、設計例1と同様に最大誤差は大きくなったが、最大極半径を小さくすることに成功している。これは、図6から分かるように、遷移域付近に生じる極の半径を小さくしたためである。これにより、最大極半径が単位円付近である場合においても安定制約が有効であることを確認することができた。

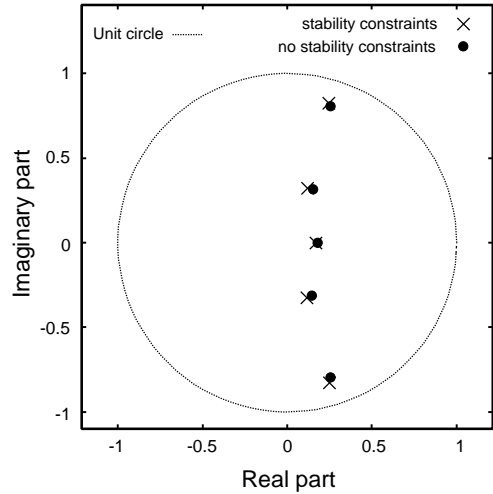


図4 設計例1の極配置

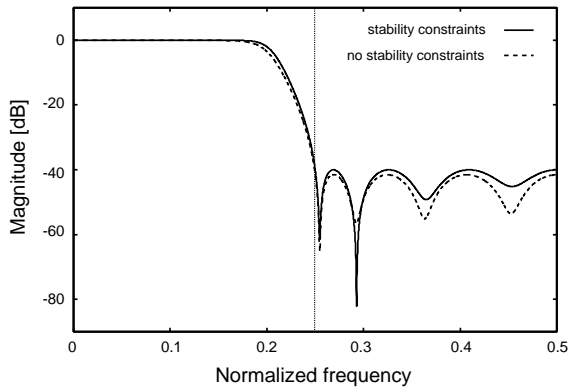


図1 設計例1の振幅特性

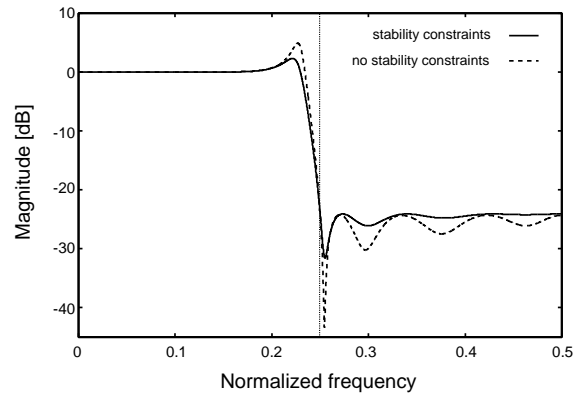


図5 設計例2の振幅特性

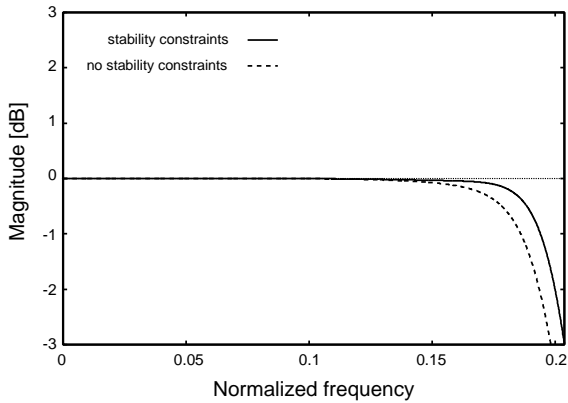


図2 設計例1の通過域振幅特性

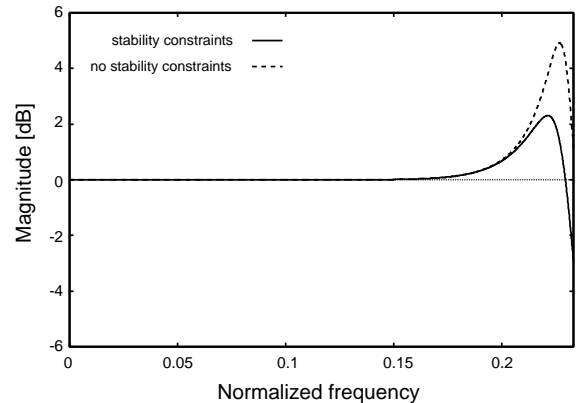


図6 設計例2の通過域振幅特性

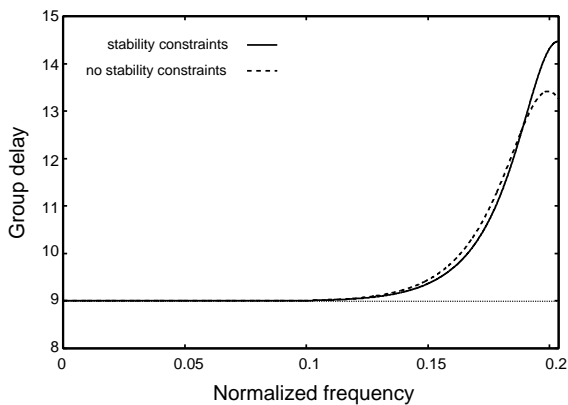


図3 設計例1の通過域群遅延特性

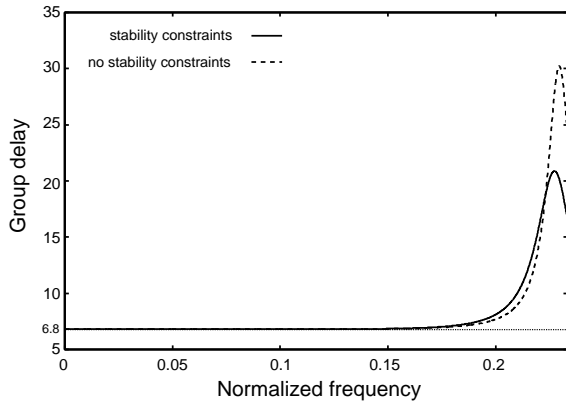


図7 設計例2の通過域群遅延特性

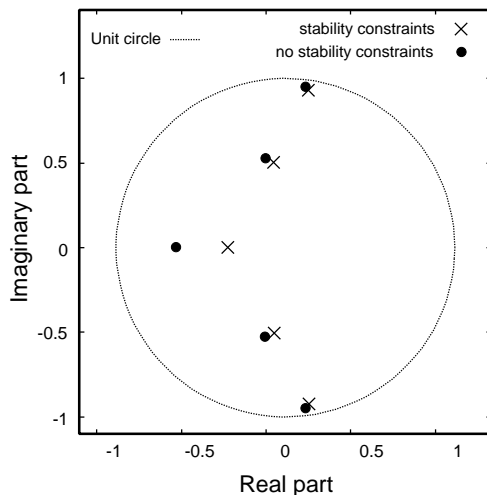


図8 設計例2の極配置

8 むすび

本研究では、通過域平坦阻止域等リプル振幅特性をもつ安定な平坦群遅延 IIR フィルタの最適な設計法を提案した。本来は非線形半無限計画問題である IIR フィルタの複素近似設計問題を実回転定理を用いて線形半無限計画問題として定式化し、安定性を保証する正実性と、通過域における振幅特性と群遅延特性の平坦条件を設計問題の制約条件として付加し、阻止域等リプル振幅特性と、通過域平坦振幅特性、平坦群遅延特性をもつ安定な IIR フィルタの設計問題を定式化した。さらに、定式化した設計問題に対し、線形半無限計画法の1手法である3段階法を用いることで最適解を算出した。

その結果、提案法によって、通過域平坦阻止等リプル振幅特性をもつ安定な平坦群遅延 IIR フィルタの最適設計

が可能であることを確認し、設計例より、提案法の有効性を示した。

参考文献

- [1] 武部幹, デジタルフィルタの設計, 東海大学出版会, 1986.
- [2] 張熙, 吉川敏則, “通過域平坦阻止域等リプル特性を有する IIR デジタルフィルタの設計,” 信学論 (A), vol.J82-A, no.3, pp.317-324, Mar. 1999.
- [3] 竹内良介, 張熙, 吉川敏則, 武井由智, “近似的直線位相特性を有するチェビシェフ型 IIR フィルタの設計,” 信学論 (A), vol.J86-A, no.4, pp.364-372, Apr. 2003.
- [4] R. Hegde, B.A. Shenoi, “Magnitude approximation of digital filters with specific degrees of flatness and constant group delay characteristics,” IEEE Trans. Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing, vol.45, no.11, pp.1476-1486, Nov. 1998.
- [5] 張熙, 相澤正智, 吉川敏則, “通過域平坦阻止域等リプル振幅特性をもつ平坦群遅延 IIR フィルタの一設計法,” 信学論 (A), vol.J90-A, no.7, pp.578-587, Jul. 2007.
- [6] 山崎崇之, 陶山健仁, “線形半無限計画法による IIR フィルタの最適設計,” 電学論 (C), vol.129-C, no.1, pp.53-58, Jan. 2009.
- [7] X. Chen, T.W. Parks, “Design of FIR filters in the complex domain,” IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, vol.35, no.2, pp.144-153, Jun. 1987.
- [8] A. Chottera, G. jullien, “A linear programming approach to recursive digital filter design with linear phase,” IEEE Trans. Circuits and Systems, vol.29, no.3, pp.139-149, Mar. 1982.
- [9] 今野浩, 線形計画法, 日科技連, 1987.
- [10] 大石進一, 精度保証付き数値計算, コロナ社, 2000.