RA-001

最大クリーク問題の多項式時間的可解性 - 基本的結果 -

中西 裕陽, 富田 悦次 (電気通信大学 先進アルゴリズム研究ステーション)

Polynomial-Time Solvability of the Maximum Clique Problem - A Basic Result -

Hiroaki Nakanishi, Etsuji Tomita

1. はじめに

NP 完全問題は多項式時間的に解くことは不可能であることが強く予測されている．ここで，種々の NP 完全問題に対して，それと同様な問題が多項式時間的に可解となる十分条件や，何らかの条件付けをしてもなお NP 完全に留まるかについて多くの研究がなされている [1]．いわゆる最大クリーク問題 [1] あるいはそれと双対な最大独立節点集合問題 [1] は典型的な NP 完全問題であり，circular-arc グラフなどの特殊グラフに対しては多項式時間的解法が示されている [2]．しかし，一般グラフに対して最大クリーク問題あるいは最大独立節点集合問題が多項式時間的に可解となるような妥当な条件は，筆者らの調査した限りにおいては，未だ提示されていない．本論文では，一般グラフにおける最大次数 Δ に関し，Δ が節点数 n に対して $\lg n$ 以下であるとの自然な条件が成立している場合について，その条件下では最大クリーク問題が $O(n^3)$ の多項式時間で可解となることを明らかにする．

本結果に先立ち，Tomita らは極大クリークを全列挙する $O(3^{n/3}) = (2^{0.528n})$-時間アルゴリズムを発表しているが [6]，これを最大クリーク 1 個だけと出力を限定することにより，当然この計算量は大きく軽減できる．これに従い，筆者らは Shindo-Tomita のアルゴリズム MAXCLIQUE[4] を基とした最大クリーク抽出アルゴリズムとその最大時間計算量解析結果を発表してきている [8]，[9]，[11]．本論文ではそれと同様のアルゴリズムに基づいて，前記結論を導く．

2. 諸定義と記法

(1) 本論文で対象とするグラフは, 自己閉路をもたない無向グラフ $G = (V, E)$ である．ここで, V は**節点**の有限集合, E は相異なる 2 節点の非順序対 (v, w)（これを**辺**と呼ぶ) の集合である．節点 v と w は, $(v, w) \in E$ が成り立つとき**隣接している**という．

集合 V に対して, その要素数を $|V|$ で表す．また, 集合 V が順序付き集合である時，その先頭要素を $V[1]$ で表す.

(2) $v \in V$ について, $\Gamma(v)$ を $G = (V, E)$ の内で v に隣接する全ての節点の集合とする．即ち,

$\Gamma(v) = \{w \in V \mid (v, w) \in E\}$ ($\not\ni v$).

$|\Gamma(v)|$ を v の次数と呼ぶ.

(3) 節点の部分集合 $W \subseteq V$ について,

$E(W) = \{(v, w) \in E \mid v, w \in W\}$

としたとき, $G(W) = (W, E(W))$ を $G = (V, E)$ の W による**誘導部分グラフ**と呼ぶ.

(4) 与えられた $Q \subseteq V$ の誘導部分グラフ $G(Q)$ に対して, 次が成り立つとき, $G(Q)$ は**完全**であるという.

$^{\forall}v, w \in Q$ $(v \neq w)$ に対して $(v, w) \in E$

このとき Q は**クリークである**という．またクリークのサイズを $|Q|$ によって定義する.

異なるクリークの真部分集合でないクリークを**極大クリーク**といい, 極大クリークのうちでサイズが最大であるものを**最大クリーク**という.

3. アルゴリズム MAXCLIQUE

アルゴリズム MAXCLIQUE を図 1 に示す．このアルゴリズムは基本となる処理である深さ優先探索 EXPAND に, 部分森の同一化および次数による限定操作 [4] をそれぞれ追加した分枝限定アルゴリズムであり, その探索過程は図 2 に示すような深さ優先探索木の集合 (クリーク探索森と呼ぶ) として表現することができる.

3.1. 次数による分枝限定

探索路上である節点 u が選択されたとき, その節点の根から葉に至る探索路の長さの上界は, その節点までの探索路の長さ (すなわちその節点までに構成されたクリークのサイズ $|Q|$) にその節点の次数 $|SUBG_u|$ を加えたものとなる．したがってもし

$|Q| + |SUBG_u| \leq |Qmax|$

が成り立つならば, その節点に関してはそれ以上再帰を行う必要はない．このような操作を**次数による分枝**

```
procedure MAXCLIQUE(G)
begin
  Q := ∅;
  Qmax := ∅;
  EXPAND(V)
end {of MAXCLIQUE}

  procedure EXPAND(SUBG)
  begin
   if SUBG = ∅ then
      if |Q| > |Qmax|
         then Qmax := Q fi
   else u :=a vertex in SUBG
              that maximizes |Γ(u) ∩ SUBG|;
     Q := Q ∪ {u};
     SUBG_u := Γ(u) ∩ SUBG;
     if |Q| + |SUBG_u| > |Qmax| then
      EXPAND(SUBG_u) fi
     Q := Q − {u};
     EXT_u := SUBG − {u} − SUBG_u;
     sort vertices in EXT_u
     in a decreasing order w.r.t their degrees
     in SUBG;
     for i := |EXT_u| downto 2 do
      v_i := EXT_u[1];
        SUBG_{v_i} := Γ(v_i) ∩ (EXT_u ∪ SUBG_u);
        Q := Q ∪ {v_i};
        Q := Q ∪ {v_i};
        EXPAND(SUBG_{v_i});
        Q := Q − {v_i};
        EXT_u := EXT_u − {v_i};
        EXT_u[1] :=a vertex that maximizes
                     Γ(EXT_u[1]) ∩ SUBG
      else i := 1 fi    od     fi
  end {of EXPAND}
```

図 1 アルゴリズム MAXCLIQUE

限定と呼ぶ.

3.2. 部分森の同一化

基本アルゴリズムに, 次のような**部分森の同一化**と呼ぶ節点の並べ替え処理を導入する.

(1) 入力節点集合 $SUBG$ 中の最大次数節点 u を先頭に移す

(2) $SUBG-\{u\}$ を, u に隣接する

$SUBG_u = \Gamma(u) \cap SUBG$

と, 隣接しない

$EXT_u = (SUBG-\{u\}) - SUBG_u$

とに分割する．また EXT_u 内の節点を次数降順に並べ替える.

(3) この順序付き節点集合

$\{u\} \cup EXT_u \cup SUBG_u$

を改めて $SUBG$ とおく.

このような節点の並べ替え処理を行った後に基本アルゴリズムを用いてクリーク探索を行うと, 先頭の u を根とした探索森から u を除いた部分（即ち，u の子節点集合 $SUBG_u$ を根集合とする探索部分森）と，$SUBG$ の最後部の $SUBG_u$ 部分に対する探索木の集合（部分森）とは同一のものとなる．したがって, u を根とする探索木より得られる最大クリークの節点数は, 最後部 $SUBG_u$ 部分の探索から得られる最大クリークの節点数よりも (u の分)1 だけ大きい．そこで最大クリーク抽出においては, 最後部 $SUBG_u$ 部分の探索は行わない．また u と隣接しない各節点の集合

$EXT_u = \{v_{|EXT_u|}, v_{|EXT_u|-1}, \cdots, v_1\}$

(次数降順) を根集合とする探索森の探索において, 最後尾節点 v_1 の隣接部分はその直前の節点 v_2 までの探索を終えた時点で, $v_{|EXT_u|}, v_{|EXT_u|-1}, \cdots, v_2$ のいずれかの節点の隣接部分の部分集合となるため, それまでに得られている最大クリークよりも大とはなり得ない [4]．従って，節点 v_1 からの探索は行わない.

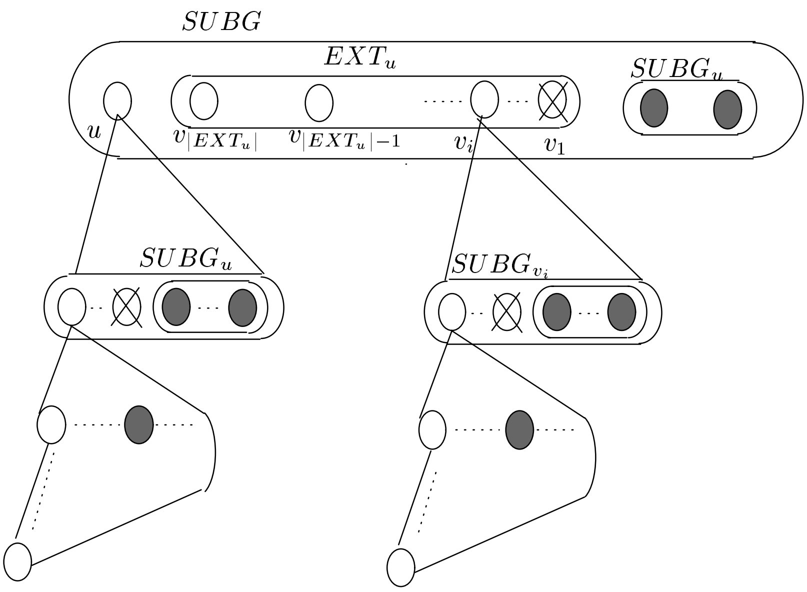
4. 最大時間計算量評価

節点集合が $SUBG$ で, $|SUBG| = n$ であるグラフに対する EXPAND($SUBG$) の最大時間計算量を $T(|SUBG|)$ とした時，次ぎの関係式が成り立つ.

$$T(|SUBG|) \leq T(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} T(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2 \quad \cdots \text{(T1)}$$

式末尾の Cn^2 はこのような問題分割に必要な全ての処理に要する多項式オーダーの計算量の上界であり, ここで定数 $C > 0$ は以下の様に定義する.

手続き EXPAND($SUBG$) に対し, 次の再帰レベルの候補節点集合となる $SUBG_u$ および $SUBG_{v_i}$ を常に空集合で与える処理を EXPAND_0 とする．このとき EXPAND_0 は時間計算量 $O(n^2)$ の処理となるが, そのような上界 Cn^2 を与える定数を (T1) 式の C とする [6]．あるグラフが与えられたとき, MAXCLIQUE(G)



: 部分森の同一化により再帰を行わない節点

: EXT 中の最後尾節点 (常に探索されない)

図 2　クリーク探索森

はそのグラフに対応したクリーク探索森を形成する．すなわち MAXCLIQUE(G) の計算量とはそのようなクリーク探索森を形成するために必要な計算量である．与えられたグラフによって計算量は異なるため，アルゴリズムの性能を評価するに当ってはグラフの複雑さの評価基準を導入する必要がある．

本論文では [7]-[9] および [11] に続き，この複雑さの基準としてグラフの最大次数 Δ に着目する．

ここで，MAXCLIQUE(G) ($G = (V, E)$) の時間計算量のオーダーは EXPAND(V) の時間計算量のオーダーと同一である．

主要定理証明に先立ち，まず最大次数 Δ をパラメーターとして用いた時間計算量評価結果を以下に与える．

[**補題**] 節点集合が $SUBG$ で，$|SUBG| = n$，最大次数が $\Delta \geq 0$ なる任意のグラフにおいて，EXPAND($SUBG$) の最大時間計算量 $T(n) = T(|SUBG|)$ は定数 $C' = 3C$ を用いて

$T(n) \leq C' 2^{\Delta} n^2$

である．

(証明) 証明は最大次数 Δ に関する数学的帰納法による．

先ず，$\Delta = 0$ の場合に $T(|SUBG_u|)$ の計算量について考える．

(0)(グラフの最大次数が 0 の場合) いま $\Delta = 0$ により

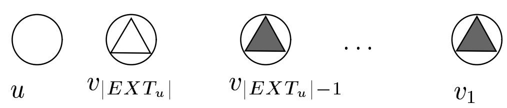
$SUBG_u = \emptyset$

であるから，u に関してアルゴリズムは 1 回だけ再帰を行い，その後処理を終了する．従って前述の定数 C の定義により

$T(|SUBG_u|) \leq Cn^2$

である．

更にこの場合の $SUBG_{v_i}$ ($|EXT_u| \geq i \geq 2$) についての計算量を考えると，まず $v_{|EXT_u|}$ に対して，その次数が 0 であることにより限定操作が適用され，次数降順に整列されていることにより残りの各 v_i ($|EXT_u| - 1 \geq i \geq 2$) は探索から除外される．



: 限定操作により探索されない節点

: 次数降順により探索されない

図 3 (0)

結果としてこの場合 EXPAND($SUBG_{v_i}$) ($|EXT_u| - 1 \geq i \geq 2$) は全く実行されない．よって時間計算量は EXPAND の 1 再帰において次の再帰レベ

ルでの EXPAND の入力を全て空集合とした場合以下となるから, 定数 C の定義により

$\sum_{i=2}^{|EXT_u|} T(|SUBG_{v_i}|) \leq Cn^2$

が成立する．以上と (T1) により

$$T(|SUBG|) \leq T(|SUBG_u|) + \sum_{i=2}^{|EXT_u|} T(|SUBG_{v_i}|) + Cn^2$$
$$\leq Cn^2 + Cn^2 + Cn^2 = 3Cn^2 = C' \cdot 2^{0.401 \cdot 0} \cdot n^2.$$

よって, $\Delta = 0$ において題意は成立する．

次に，ある $\Delta \geq 0$ 以下の全ての Δ において

$T(|SUBG|) \leq C'2^{\Delta}n^2$

が成立すると仮定する．この仮定のもとで, 節点数 n, 最大次数 $\Delta + 1$ であるグラフについての計算に要する計算量を考える．

この節点の子節点の最大次数は Δ 以下であるから, そのような最大次数子節点の次数を $\Delta - k (0 \leq k \leq \Delta)$ とおく．このとき $T(|SUBG|)$ は, (T1) 式と帰納法の仮定によって

$$T(|SUBG|) \leq ((\Delta+1) - (\Delta - k) - 1) \cdot C'2^{(\Delta-k)}n^2 + Cn^2$$
$$= kC'2^{(\Delta-k)}n^2 + Cn^2$$
$$= C'2^{\Delta}\left(\frac{k}{2^k} + \frac{1}{3 \cdot 2^{\Delta}}\right)n^2$$
$$\leq C'2^{\Delta}\left(\frac{k}{2^k} + 1\right)n^2.$$

ここで, $k \geq 0$ において $\frac{k}{2^k} \leq 1$ であるから

$$T(|SUBG|) \leq C'2^{\Delta}(1+1)n^2$$
$$= C'2^{\Delta} \cdot 2 \cdot n^2$$
$$= C'2^{(\Delta+1)}n^2$$

である．

従って, 帰納法による帰結により, 任意の $\Delta \geq 0$ において補題の関係が成立する． **(証明終)**

これより,

[定理] 節点数 n, 最大次数 Δ のグラフにおいて

$\Delta \leq \lg n$

であるならば, このグラフに対する最大クリーク問題は $O(n^3)$ の多項式時間で可解である．

(証明) [補題] において $\Delta \leq \lg n$ を適用すると

$$T(n) \leq C'2^{\lg n}n^2 = C'n \cdot n^2 = C'n^3.$$

従って，$T(n) = O(n^3)$.

NP 困難な最大クリーク抽出問題に対する上記結果より, NP 完全な判定問題である最大クリーク問題に対する本結論が直ちに得られる． **(証明終)**

5. むすび

一般グラフに対する最大クリーク抽出問題が, 自然な条件下で多項式時間的に可解となることを示した．

一般の最大クリーク抽出問題の最大時間計算量に対して，筆者らは従来の評価 [3]-[5], を大幅に改善する 多項式計算領域における結果を発表してきたが [8], [9], [11], 本論文における手法は，その一般結果をより単純明快に証明する新しい基礎ともなる．

謝辞 有益なコメントを頂いた, 京都大学　伊藤大雄 准教授, 岩間一雄 教授, 東北大学 徳山豪 教授および, 本論文アルゴリズム MAXCLIQUE の実験的確認評価に当たって頂いた当研究室卒研生 玉田和洋君に感謝いたします．なお, 本研究は科研費基盤研究 (B), (C) の補助を受けている．

参考文献

[1] M. R. Garey, D. S. Johnson, “ Comouters and Intaractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness, ”W. H. Freeman & Co. (1979).

[2] S. Masuda, K. Nakajima,“ An optimal algorithm for finding a maximum independent set of a circular-arc graph, ”SIAM J. on Computing 17, 41-52 (1988).

[3] R. E. Tarjan, A. E. Trojanowski, “ Findig a maximum independent set, ”SIAM J. on Computing 6, 537-546 (1977).

[4] M. Shindo, E. Tomita, “ A simple algorithm for finding a maximum clique and its worst-case time complexity, ”Systems and Conputing in Japan 21, 1-13 (1990).

[5] F. V. Fomin, F. Grandoni, D. Kratsch, “ Measure and conquer: A simple $O(2^{0.288n})$ independent set algorithm, ”Proc. ACM-SIAM Symp. On Discrete Algorithms, 18-25 (2006).

[6] E. Tomita, A. Tanaka, H. Takahashi, “ The worst-case time complexity for generating all maximal cliques and computational experiments, ” Theoretical Computer Science 363, 28-42 (2006).

[7] 中西裕陽, 富田悦次,“ 最大クリークを抽出する単純なアルゴリズムの最大次数 4 のグラフにおける計算量,” 信学技報, COMP2007-18, 1-7 (2007).

[8] 中西裕陽, 富田悦次,“ 最大クリークを抽出する計算量 $O(2^{0.24945n})$ の多項式領域アルゴリズム, ” 信学技報, COMP2007-46, 33-40 (2007).

[9] 中西裕陽, 富田悦次,“ 最大クリークを抽出する計算量 $O(2^{0.19669n})$ の多項式領域アルゴリズム, ” 情処研報, 2007-AL-115, 17-24 (2007).

[10] E. Tomita, “ The maximum clique problem and its applications (Invited lecture), ” IPSJ SIG Tech. Rep., 2007-MPS-67, 21-24 (2007).

[11] 中西裕陽, 富田悦次,“ 最大クリークを抽出する計算量 $O(2^{0.19171n})$ の多項式領域アルゴリズム,” 情処研報, 2008-AL-116, 15-22 (2008).