

# 無向ネットワーク中のソース配置問題に対する近似アルゴリズム

## An Approximation Algorithm for a Source Location Problem in Undirected Networks

坂下 麻里子\*  
Mariko Sakashita

牧野 和久\*  
Kazuhisa Makino

藤重 悟†  
Satoru Fujishige

### 1 序論

点集合  $V$  と枝集合  $E$  をもつ無向グラフ  $G$  に容量関数  $u: E \rightarrow \mathbb{Z}_+$  を付与した無向ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, E), u)$  を考える。ただし、 $\mathbb{Z}_+$  は、非負整数の集合である。本論文では、この無向ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, E), u)$ 、要求関数  $d: V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ 、コスト関数  $c: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  が与えられたとき、以下の条件を満たし、最小なコスト ( $\sum_{v \in S} c(v)$ ) をもつ集合  $S \subseteq V$  を求めるというソース配置問題を考察する。ただし、 $\mathbb{R}_+$  は、非負実数の集合である。

$S$  と各点  $v \in V$  との間の最大フロー量  $\lambda(S, v)$  が要求値  $d(v)$  以上である。

このソース配置問題は、例えば、マルチメディアネットワーク中にサービス要求量を指定した複数のクライアントが与えられたとき、その要求を満足しながら最小コストで (ミラー) サーバを配置するという問題に対応し、信頼度を考慮に入れた施設配置問題として近年盛んに研究されている (例えば、[1, 3, 4, 6, 7] など)。また、ネットワーク理論で有名な連結度増大問題とも深く関連している [5]。

現在のところソース配置問題は、コスト関数が一樣な場合 (要求関数は一樣でなくてもよい) は、 $O(nM(n, m))$  時間で解け、要求関数が一樣な場合 (コスト関数は一樣でなくてもよい) は、 $O(n(m + n \log n))$  時間で解けることが示されている [1]。ここで、 $M(n, m)$  は  $n$  個の点、 $m$  本の枝を持つ無向ネットワーク中の最大フローを求めるために要する時間である。また、コスト関数と要求関数ともに一般の場合は、ソース配置問題をナップサック問題へ帰着することで弱 NP 困難性が示されている。しかしながら、強 NP 困難であるか、あるいは、擬多項式時間アルゴリズムをもつかどうか未解決のまま残されており [1]、近似精度保証付きの近似アルゴリズムは、これまで開発されていない。

### ソース配置問題の拡張

上記のソース配置問題では、コスト関数として施設の建設費用 ( $v$  における建設費用  $c(v)$ ) のみを扱っている。しかしながら、現実のコスト関数は建設費用に加え、供給量に依存することが多い。従って、本研究では以下のように拡張したソース配置問題も考察する。

まず、無向ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, E), u)$  を対称な有向ネットワーク  $\hat{\mathcal{N}} = (\hat{G} = (V, \hat{E}), \hat{u})$  と見なす。ただ

し、 $\hat{E} = \{(v, w), (w, v) \mid (v, w) \in E\}$  であり、任意の枝  $(v, w) \in \hat{E}$  に対して、 $\hat{u}(v, w) = \hat{u}(w, v) = u(v, w)$  と定義する。ここで、フロー  $f: \hat{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$  は、以下の条件をみたすとき、供給  $x: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対して実行可能であるという。

- (i)  $\partial f(v) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{(v, w) \in \hat{E}} f(v, w) - \sum_{(w, v) \in \hat{E}} f(w, v) \leq x(v) \quad (v \in V)$
- (ii)  $0 \leq f(e) \leq \hat{u}(e) \quad (e \in \hat{E})$

$\partial f(v)$  は、フロー  $f$  の  $v$  における境界と呼ばれ、 $v$  から出るフロー量の総和から入るフロー量の総和を引いたもので、(i) は、その境界が供給量  $x(v)$  以下であることを示している。また、(ii) は、容量制約である。

我々は、無向ネットワーク  $\mathcal{N} = (G = (V, E), u)$ 、要求関数  $d: V \rightarrow \mathbb{Z}_+$ 、各点  $v$  におけるコストを表す単調な凹関数  $c_v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  が与えられたとき、各点  $v \in V$  への流入量 ( $-\partial f(v)$ ) が少なくとも要求量  $d(v)$  以上であり、かつ、最小なコスト ( $\sum_{v \in V} c_v(x(v))$ ) をもつ供給  $x \in \mathbb{R}_+^V$  を求める問題を考察する。ここで、 $c_v$  の単調凹性は、供給量  $x(v)$  が増せば、コストが増す (より正確には、減らない) が、割引率は上がることを意味しており、一つの自然な仮定である。

これまで要求量  $d(v)$  が一樣な場合の拡張されたソース配置問題は考察されたが [5]、一般的な場合については考察されていない。

### 本論文での成果

本研究では、上記の未解決問題に対して以下の結果を得る。

定理 1 ソース配置問題は、強 NP 困難である。

さらに、以下のような近似困難性も示すことができる。

定理 2  $\text{NP} \not\subseteq \text{DTIME}(N^{\log \log N})$  ならば、ある定数  $c > 0$  が存在して、ソース配置問題に対する多項式時間  $c \ln \sum_{v \in V} d(v)$ -近似アルゴリズムは存在しない。

ここで、 $\text{NP} \not\subseteq \text{DTIME}(N^{\log \log N})$  とは、任意の NP 完全問題が  $O(N^{\log \log N})$  時間の決定性アルゴリズムをもたないことを意味し、多くの計算量理論の研究者によって信じられている。ただし、 $N$  は入力長とする。また、 $\alpha$ -近似アルゴリズム  $A$  とは、近似比 (すなわち、 $A$  の出力する解の目的関数値)/(最適値) が必ず  $\alpha$  以内である解を出力するアルゴリズムのことをいう。

一方、肯定的な結果として、我々は貪欲法に基づく近似アルゴリズムを提案し、そのアルゴリズムが (オーダの意味で) 最適であることを示す。

\*大阪大学大学院 基礎工学研究科 Graduate School of Engineering Science, Osaka University.

†京都大学 数理解析研究所 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University.

定理 3 ソース配置問題は, 多項式時間で  $(1 + \ln \sum_{v \in V} d(v))$ -近似可能である.

また, 木構造ネットワークに対しては以下の結果を得る.

定理 4 与えられたネットワーク  $\mathcal{N}$  が木構造であるならば, ソース配置問題は擬多項式時間アルゴリズムをもつ.

この定理と(木構造ネットワークを用いて得られた)弱 NP 困難性の結果 [1] は, 木構造ネットワークにおけるソース配置問題の計算限界を示している.

拡張されたソース配置問題については, 定義から明らかに本来のソース配置問題より簡単ではないので, 定理 1, 2 より, 以下の否定的な結果を得る.

系 1 拡張されたソース配置問題は強 NP 困難である. また,  $\text{NP} \not\subseteq \text{DTIME}(N^{\log \log N})$  ならば, ある定数  $c > 0$  が存在して, 拡張されたソース配置問題に対する多項式時間  $c \ln \sum_{v \in V} d(v)$ -近似アルゴリズムは存在しない.

肯定的な結果に関しては, 我々は, 定理 3 の近似アルゴリズムを一般化し, 近似率の最適なアルゴリズムの開発に成功した.

定理 5 拡張されたソース配置問題は, 多項式時間で  $(1 + \ln \sum_{v \in V} d(v))$ -近似可能である.

本論文では, 頁数制限のため, 定理 1, 2, 3 の略証のみを記す.

## 2 定理 1, 2 の略証

本節では, NP-困難問題として有名な集合被覆問題 [2] をソース配置問題に帰着させることによって定理 1 を示す.

集合被覆問題とは, 台集合  $U = \{1, 2, \dots, p\}$  の部分集合族  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_q\}$  が与えられたとき,  $U$  のすべての要素を被覆する最小サイズの  $S$  の部分族  $\mathcal{X}$  (すなわち,  $\bigcup_{S_i \in \mathcal{X}} S_i = U$  かつ  $|\mathcal{X}|$  が最小) を求める問題である. この問題例  $I$  からソース配置問題の問題例  $J(\mathcal{N} = (G, u), d, c)$  を以下のように構成する.

$$V = \{t_1, t_2\} \cup \{s_1, \dots, s_q\} \cup \{u_1, \dots, u_p\}$$

$$E = \{(t_1, s_i) \mid i = 1, \dots, q\} \cup \{(u_j, t_2) \mid j = 1, \dots, p\}$$

$$\cup \{(s_i, u_j) \mid j \in S_i, i = 1, \dots, q\}$$

容量関数  $u$  は,  $u(t_1, s_i) = \ell_i$  ( $i = 1, \dots, q$ ),  $u(s_i, u_j) = 1$  ( $j \in S_i, i = 1, \dots, q$ ),  $u(u_j, t_2) = k_j - 1$  ( $j = 1, \dots, p$ ) とする. ただし,  $|S_i| = \ell_i$ ,  $|\{i \mid S_i \ni j\}| = k_j$ . また, 要求関数  $d(v)$  は,  $v = t_1, t_2$  のとき  $\sum_i \ell_i$ , それ以外は 0 とし, コスト関数  $c(v)$  は,  $v = t_2$  のとき 0,  $v \in \{s_1, \dots, s_q\}$  のとき 1, それ以外のとき  $q + 1$  とする.

直感的には, 点  $s_i$  は集合  $S_i$  に対応し, 点  $u_j$  は,  $U$  の要素  $j$  に対応する. また, 証明は紙面の都合上省略するが, 次の補題が成り立つ.

補題 1  $\mathcal{X}$  が  $I$  の最適解となるための必要十分条件は,  $Y = \{t_2\} \cup \{s_i \mid S_i \in \mathcal{X}\}$  が  $J$  の最適解となることである.

この補題より, 定理 1 が示される. また, 集合被覆問題の近似困難性から定理 2 も示される.

## 3 定理 3 の略証

本節では, 定理 3 を達成する貪欲法に基づく近似アルゴリズムを紹介する(紙面の都合上, 証明は省略する).

任意の  $v \in V$  と  $S \subseteq V$  に対して, 以下のように関数  $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}_+$  と  $\beta: V \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  を定義する.

$$\alpha_S(w) = \max\{d(w) - \lambda(S, w), 0\}$$

$$\beta_{(S,v)}(w) = \max\{\lambda(S \cup \{v\}, w) - \lambda(S, w), 0\}.$$

ただし,  $\lambda(S, w)$  は,  $S$ - $w$  間の最大フロー量を表し,  $w \in S$  のときは,  $\lambda(S, w) = +\infty$  とする. また,  $\infty - \infty = 0$  と仮定する. さらに,  $\gamma_{(S,v)} = \min\{\alpha_S, \beta_{(S,v)}\}$ ,

$$g_S(v) = \frac{c(v)}{\sum_{w \in V} \gamma_{(S,v)}(w)}$$

とする.  $g_S(v)$  の分母は  $S$  に点  $v$  を加えることにより(要求に関して)新たに満たされる量を表し, 分子はそのときのコストの増加量を表す.

提案するアルゴリズムは, 初期状態  $S = \emptyset$  から始まり, すべての  $v \in V$  に対して  $g_S$  の分母が 0 とならない間,  $g_S(v)$  を最小にする  $v$  を求め,  $S := S \cup \{v\}$  と  $S$  を更新するものである. ここで, すべての  $v \in V$  に対して  $g_S$  の分母が 0 のとき,  $S$  はソース配置問題の実行可能解であることに注意されたい.

詳しい証明は省略するが, ネットワーク  $\mathcal{N}$  に対するカット関数の劣モジュラ性などを用いることで, 上記のシンプルな貪欲法に基づくアルゴリズムの近似率が  $1 + \ln \sum_{v \in V} d(v)$  で押さえられることがわかる.

## 参考文献

- [1] K. Arata, S. Iwata, K. Makino and S. Fujishige: Locating sources to meet flow demands in undirected networks, *Journal of Algorithms*, 42 (2002) 54–68.
- [2] M. R. Garey and D. S. Johnson: *Computers and Intractability*, Freeman, New York, 1979.
- [3] H. Ito and M. Yokoyama: Edge connectivity between nodes and node-subsets, *Networks*, 31 (1998) 157–164.
- [4] H. Nagamochi, T. Ishii and H. Ito: Minimum cost source location problem with vertex-connectivity requirements in digraphs, *Information Processing Letters*, 80 (2001) 287–294.
- [5] 坂下麻里子, 牧野和久, 藤重悟: ラミナー被覆制約を持つ単調凹関数最小化問題, *FIT2003 情報技術レターズ*, vol.2, (2003) 9–10.
- [6] H. Tamura, M. Sengoku, S. Shinoda and T. Abe: Some covering problems in location theory on flow networks, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E75-A (1992) 678–683.
- [7] 田村, 菅原, 仙石, 篠田: 無向フローネットワークにおける総合被覆問題について, *電子情報通信学会論文誌*, J81-A (1998) 863–869.