

数学的思考能力を高めるための e-learning システムの開発 Development of E-learning System to Enhance Mathematical Thinking Ability

下郡 啓夫†
Akio Shimogoori

大場 みち子‡
Michiko Oba

1. はじめに

E-learning を用いて数学的思考能力を高めるシステムを開発することを目的とし、本論文では、その解決策として、数学的思考能力を問題理解と問題解決の総合力として捉え、読み理解と一般的数学問題、数学的思考能力の3つの問題群を作成することとする。さらに、数学的思考能力の問題群の回答の評価に、文章理解・問題解決の分析観点項目を組み入れることで、設問の意図が反映できるように点数化することを試みる。また、点数化から見えない生徒の学習状況や問題に対する意識を、実質所要時間及びアンケートから分析することで解決を図る。

2. 文章題の解決過程

今回は数学的思考能力を考えていく上で、問題を文章題の解決過程に限定する。なぜなら数学的知識の獲得や数理的処理の習得は、文章題の解決の1過程として考えることができるからである。

2.1 文章題の定義

文章題にはつぎの2つのパターンがある。

- (1) 数学的概念に関わる問題を単純に文章で記述しているもの
- (2) 日常生活の題材をもとに問題が構成されているもの

本論文では、数学的思考の1つであるモデル化を重要視しているため、文章題は(2)を想定している。本論文で考える数学のモデル化とは図1のとおりである。

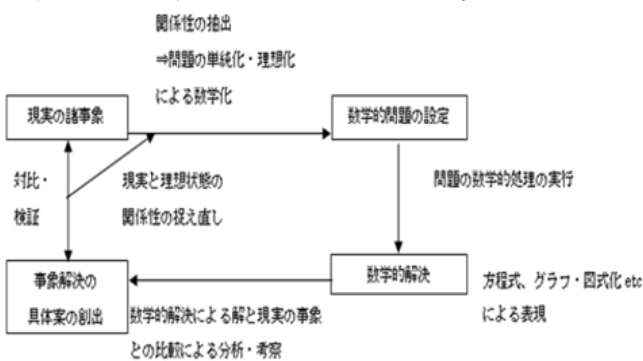


図1 モデル化

2.2 文章題の解決過程

本論文では、文章題の問題解決過程を、Mayer(1985)の考えに依拠し、4つの下位過程に分類する。

- (1) 問題文を読解し、理解する変換段階
- (2) 読み終えた文章内容をスキーマと照合して理解する統合段階
- (3) 理解内容に適合した立式をするプラン化段階
- (4) 立式の実行段階

変換段階とは、与えられた文章を構成している文ごとに、その内容を保存してほかの文で表現したりすることで、問題文で問われている求答事項の把握をすることである。また統合段階とは、変換段階で構成された文単位スキーマと、学習者の有する数学的スキーマとを統合することを指している。文章題は、この2つの段階を経て問題理解がなされるのである。

問題理解後、文章題の問題解決は、プラン化過程及び実行過程の2つの段階を経て行われる。前者は、自分の認知活動を制御するモニタリングと、解法を見出す方略を踏まえた上で立式を行う段階であり、後者はその立式を計算の仕方や技能、計算アルゴリズムの知識を用いて、的確に実行する段階である。

2.2 実装化に向けて

2.2.1 問題群の作成

数学的思考能力は、問題理解過程と問題解決過程の総合力であるため、その2つの過程を養成する問題が必要である。そのため実装化に向けて、次のような問題群の作成を考えている。

- (1) 読み理解問題群
- (2) 一般的数学問題群
- (3) 数学的思考能力を問う問題群

(1)の問題群は、言語力や情報を正確に読み取る読解力、筋道を立てて思考する論理的思考力を確認する問題群であり、学習者の変換過程に着目している。また、その確認項目を、数学的思考能力測定の際の点数化に用いる。さらに、論理的表現力の確認項目としても想定している。

(2)の問題群は、学習者がどれだけの数学的知識を習得しているかを確認する問題であり、つぎのように大きく4つにカテゴリー化する。この問題群は、数学的知識を形式的に問う問題に留めておく。

- ①数概念：数の大小や順序、四則演算など
- ②量概念：面積・体積や時間、速度など
- ③図形概念：位置関係などの様々な図形の性質
- ④関係概念：関数、表やグラフなど

(3)の問題群に関しては、数学的思考能力として求められる解決過程が見える形の問題を準備する。

例えば、吉田光由『塵劫記』に以下のような油分け算がある。

油はかり分ける事
斗桶に油一斗あるを、七升枵と三升枵と二つある。これにて、五升ずつに分けたい(以下略)

† 北星学園大学附属高等学校

‡ 公立はこだて未来大学

これを、数学的思考能力がどの段階までできているのかを確認するために、以下のような各質問項目によってどのような思考が必要なのか、学習階層の分析ができるような設問を考える。これは、学習者の認知的方略に関する強み、弱みをはっきりさせるためである。

- (1) 一斗は何升か。
- (2) 実際、具体的に5斗ずつに分けなさい。
- (3) 以下の表を利用して、今回の油分けの仕方の具体的な操作を整理しなさい

回数	1斗桶	7升枡	3升枡	操作
0	10	0	0	初期状態
1	3	7	0	1斗桶から7升枡に移す
2

- (4) (3)から最短手順で何回になるのか、答えなさい。
- (5) (4)の結果から、最短手順で油分けをする場合に必要操作の基本パターンはどのようなものか。
- (6) その基本パターンは、例えば8升枡と2升枡、6升枡と4升枡などの2つの枡を用いても可能か。
- (7) 最短手順と2つの枡との間にはどのような関係があるか。

2.2.2 数学的思考能力を問う問題の点数化

数学的思考能力を問う問題に関して、点数を以下のようにする。問題理解の分析観点項目を a_i 、問題解決の分析項目を b_i とし、それぞれの観点項目の重みを α_i 、 β_i とする。さらに、 t は問題 S を解くのにかった所要時間、 T は問題 S を解く目標時間であり、 $t \leq T$ のとき $\frac{T}{t} = 1$ と考える。このとき、問題 S の点数 S_{point} を設問の意図する認知的方略の定着度と学習率の積として算出する。

$$S_{point} = \frac{T}{t} \times \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \beta_k b_k \right)$$

$$0 \leq \alpha_i, \beta_k \leq 1, \sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{k=1}^n \beta_k = 1$$

2.2.3 学習者の数学的思考能力の把握

学習者の数学的思考能力の把握は、実際の問題の解答状況だけでは把握しきれない。実際、設問の所要時間などから類推・思考状況や学習者の設問に対する直観なども影響する。それらの状況を次のように分析を試みる。

①時間による分析

2.2.2の点数化によって、問題全体に関するデータを集積する際、全体の所要時間だけでなく、各設問の所要時間を計測することによって以下のような分析を行う。

(1)認知的戦略の発達段階の確認

学習者の認知的戦略の遷移に関して、どのような傾向が見られるかによって、学習者の補強ポイントを分析する。

(2)洞察問題に関する制約

鈴木(2004)によれば、その解決にひらめき等を要する洞察問題の解決は、複数の制約とその緩和として捉えられ、特に、初期多様性と評価が重要な働きであることを指摘している。

そのため、学習者にとって制約になりうる要素は何かを把握することによって、創造的活動において現在どの程度

までの制約に対応できるのかを見極めながら、認知的負荷の与え方を考慮できるようにする。

②設問の解答提出時における質問紙による評価

各設問の難易度の自己評価を質問紙によって5段階評価で行う。また、それらの評価に関してのコメント、さらに大問の解答をレポートで提出させることを行う。前者はデータと本人の自己評価によって、各認知的方略の教授者のデータと学習者の自己分析の両者の評価の開きを是正するためである。また、後者は、数学で求められる論理的思考力として次の3つがあり、c)に着目したものである。

- a)問題の構造を的確に捉える能力
- b)筋道を立てて論理的に考える力
- c)論理的表現力

これは問題解決された段階で、それをどう文章化できるかを確認することで、本人の論理的整合性、順序性などを分析するものである。

3. おわりに

数学的思考能力を高める E-learning のシステムを開発していく上で、問題理解と問題解決の2つの過程に着目した仕組み作りはできる見通しを得た。

このように学習者のメタ認知活動の役割に着目することで、学習者の学習定着度及び数学的思考の特性の分析だけでなく、学習者が新たな問題に挑むときに経験した問題の類似性からアプローチをするなど、思考の幅を広げていくことが期待できるであろう。また、論理的表現力を問う大問は、数学的論述の傾向を問題理解、問題解決の分析観点から行うことで、数学で求められる論理的思考を総合的に分析、育成することが可能である。

今後の課題は、問題理解と問題解決の分析観点の具体化と、数学の学習が学習者の学習意欲に大きく依存するため、学習意欲を勘案した問題提供方法を検討することである。

参考文献

- [1]和算研究所塵劫記委員会 (2000) 現代語『塵劫記』東京書籍。
- [2]Mayer, R. E. (1985) Mathematical ability. In R. J. Sternb (Ed.), *Human abilities; An information-processing approach*.(pp.127-150). New York : W.H.Freeman.
- [3]鈴木宏昭 (2004) 「創造的問題解決における多様性と評価：洞察研究からの知見」 『人工知能学会論文誌』 第19号, 145-153頁。