K-029

プログラムを用いた一次方程式の解法について

和田　平司　　　久持　佳織　　　松下　斉昭　　　山本　敦子
手塚　理恵　　　稲富　恵

所属なし。

あらまし　　　一次連立方程式の解を求めるには、１）代入法により用いる。(小学校六年頃から中学で習う。)、２）行列を用いて求める。(高校で習う。)、３）逆行列を用いて用いる。(大学で習う。）場合がある。

１)、～３)、の場合には、連立一次方程式である２つの式から求めなければならない。

時代の先端にあるパソコンを用いての教育が必要不可欠である背景に於いて、パソコンの原理や使い方や、応用に於いて理解し、把握する必要がある。小学生でも、スマホ等を使う時代であるからである。

そこで、我々は、プログラムを用いて、１つの一次方程式から，解を求めることにした。ただし。プログラムをもちいて解を求めるにあたり、

ｘ+ｙ＝ｆ、・・・・・・・・・・・・・①

なる条件と、解が整数であると云う条件を付加した。また、x＞y、y＞x、なる条件をふかした。この場合は、1つの一次式の係数が同じ場合に、①式の、ｆと同じ意味を持つ。1つの一次式とは以下の②式であらわされる。

a１・x + b1・y　＝　c1　・・・・・・・・・・②

何故、ｘ＞ｙ、ｙ＞ｘの条件が必要なのは、a1=b1,なる場合に、意味がある。それは、①式も、②式も、同じ意味で、ｃ１とｆが、同じ、等価な数を求めている。

我々の研究は、まず、自分で考えて、プログラムを設計（組み立てる)ことにより、思考過程を、自分なりに把握し、考察を、加える教育も可能である。し、最適な変数ｘ、ｙ、の値を、ある設定された、あらかじめ設定されたc、の値により、求めることも可能である。

そのこと、により小学校や中学校でのプログラムを設計し解を求める教育工学によるコンピュータを用いる教育に応用できるので報告する。

キーワード　代数学、線形代数、ｃ++言語プログラム、コンピュータ工学

１前書き　　連立一次方程式を求める場合、１）代入法により求める場合と２）行列により求める場合と、３）逆行列により求める場合がる。

１）の解法は、小学校、中学校で用いる。２）解法の場合は高校でもちいる。３）の解法の場合は大学でもちいる。それが普通である教育工学による周知の解法である。

が、我々は、コンピュータがノイマン型である場合について、コツコツとファーブル昆虫記の一ページ目の最初にでてくる,フン転がしのように、コンピュータは同じ繰り返しを得意とする。

この点を用いて、プログラムを、c++言語で設計することで、１つの一次方程式から解を求めることに成功した。

その例を、c++言語のプログラムを組むことにより、簡単に１つの式から、

ｘ+ｙ＝ｄという条件で且つ、ｘ、ｙの解が整数であることから、

Ａ・ｘ＋　Ｂ・ｙ　＝　Ｃ　　　　　　　　①式

から、係数A,B,C,と、ｄにより、x、ｙの解をもとめる事に成功した。

普通は、連立一次方程式であるから、係数のことなる①式が２つ必要になる。そうでなければ、x、y、の解は求まらないとされえていた。

しかし、我々は、プログラムを教育工学の見地から、取り入れる事をかんがえて、簡単なプログラムを組み立てる事に成功した。

ＦＯＲ文と、条件を、当てはめる事により、誰でも簡単に代数学の入門の教育が理解できる。

但し、我々が用いたプログラムはC++言語のプログラムをもちいて、x、ｙの解をもとめた。

然しプログラムにはいろいろな言語があり，それぞれ得意なプログラムを用いて、x、y、の解をもとめる事ができる。

時代の先端にあるパソコンを用いての教育が必要不可欠である背景に於いて、パソコンの原理や使い方や、応用に於いて理解し、把握する必要がある。小学生でも、スマホ等を使う時代であるからである。

そこで、我々は、プログラムを用いて、１つの一次方程式から，解を求めることにした。ただし。プログラムをもちいて解を求めるにあたり、

ｘ+ｙ＝ｆ　　・・・・・・・・・・・・①

なる条件と、解が整数であると云う条件を付加した。また、x＞y、y＞x、なる条件をふかした。この場合は、1つの一次式の係数が同じ場合に、①式の、ｆと同じ意味を持つ。1つの一次式とは以下の②式であらわされる。

ａ1・ｘ＋b1・ｙ　＝　c1　・・・・・・・・・・②

何故、ｘ＞ｙ、ｙ＞ｘの条件が必要なのは、a1=b1,なる場合に、意味がある。

それは、①式も、②式も、同じ意味で、ｃ１とｆが、同じ、等価な数を求めている。

我々の研究は、まず、自分で考えて、プログラムを設計（組み立てる)ことにより、思考過程を、自分なりに把握し、考察を、加える教育も可能である。し、最適な変数ｘ、ｙ、の値を、ある設定された、あらかじめ設定されたｃ、の値により、求めることも可能である。

我々のプログラムは参考程度にとどめてもらいたい。なぜなら、プログラムの言語はいろいろと種類があるからである。

種々の、１）から３）の解法についても本論で述べてある。我々の組立てたＣ++の言語のプログラムの例も本論の４）でのべてある。

残された課題としては、x、y、の解が実数のばあいについて、１つの一次方程式から求めることがある。

さらに、電卓に移植して、実際に計算機として、応用できる。アルゴリズムも簡単であり、演算スピードも速い。実際の店先で、買い物を生徒が行う場合に、最も近い解析法であると考えられる。

２　本論　　　連立一次方程式の解法について、１）から３）と、プログラムをもちいた場合の解法、４）について述べる・

２－１）　代入法による一次連立方程式についての解法

ここに、①式と②式からなる連立一次方程式が与えられたとする。

a１*x　+　b1*y　＝　c1　　　　　①式
a2*x　+　b2*y　＝　c2　　　　　②式

ここで係数がそれぞれ次の場合について解をもとめる。
①式を変形して、x、の式にすると。

x＝（c1－b1*y）/a1　　　　　③式

③式が求まる。③式を、②式のｘ,に代入して、ｙを求めると、ｙの解④式が、求まる。

y＝　｛c2－(a2/a1)*c1｝/｛b2－(a2/a1)*b2}　　　　　④式

解 y,が求まると。④式を、③式に、代入して、x,が求まる。

a１＝2,a2＝４、b1=3、b2＝5,c1＝１３、c2＝２３、を④式と③式に代入すると、y,x,がそれぞれもとまり、

x＝２、　y＝３、が、もとまる、
これが、小学校と中学校で求める一般的、解法である。

２－２）行列を用いた場合の解法

①式と②式で与えられた連立方程式である場合、e*a1＝d*a2、である条件がなりたつ時，①式と②式は、行列で,⑤式で表される。

| a1　b１ |　| x | ＝　| c1 |
| a2　b2 |　| y |　　| c2 |　　⑤式

で与えられる。ここで、条件　e*a1＝d*a2、であるから、⑤式は

| e*A1　e*b1 |　| x | ＝　| e*c1 |
|０　d*b2-e*b1 |　| y |　　| d*c2-e*c1 |　　⑥式

⑥式より、

(d*b2-e*b1)*y ＝ (d*c2-e*c1)　　⑦式

より

y＝ (d*c2－e*c1)/(d*b2-e*b1)　　⑧式

で、求まる。
⑧式を、①式に、代入すぅるいと、x,がもとまる。
このように、行列での操作によりもとまる。

２－３）　逆行列で求める解法

行列式が⑤式で与えられるとすると、

$$A = \begin{vmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{vmatrix} \qquad ⑨式$$

とすると、

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} \qquad ⑩式$$

が成り立つ単位行列を求める為に、Aの逆行列、A^{-1}、を求める・

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

の、逆行列A^{-1}、は

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 4/2 & -1 \end{vmatrix} \qquad ⑪式$$

で与えられる。

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 4/2 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 13 \\ 23 \end{vmatrix} \qquad ⑫式$$

の、右辺の行列式の演算を行うと、x＝２、y＝３、が求まる。

２－４）　コンピュータを用いての解法

コンピュータを用いて、プログラムを組立てて求める場合は、

$$x + y = f \qquad ⑬式$$

$$a1*x + b1*y = c1 \qquad ⑭式$$

⑬式から、

y＝　f－x、が求まり。⑭式に代入すると、

$$x = (c1 - b1*f)/(a1 - b1)$$

但し、　b1＞a1,の場合。

ｙ　＝（　ｃ１　－　ａ１＊ｆ　）/　（　ｂ１－ａ１　）

但し　　　　a1>b1, の場合。

この、アルゴリズムをプログラムをもちいて組立てれば宜しい。
プログラムの例題を次のページに求めている。

```
FOR 文を用いるところの、条件式を
IF   B>A       else   case2
FOR  X>0
       ｆ＝ｆ+１
       ｘ＝   (  ｃ１－ｂ１＊ｆ  ）/   （ ａ１－ｂ１  ）
       Return
case2    IF  A>B  else  err1
         FOR   y>0
          f  =  f  + 1
          y =   (  ｃ１－ａ１*  ｆ）/  (ｂ１－  ａ１  )
         Return
```

3 考察

１）の代数法により連立の数が多くなると、大変な労力を必要として、結果的には、計算の誤りを導く。

２）の行列による解法は、係数がおおきくなると、最大公約数や、最小公倍数を求めるにあたり、行列の操作を繰り返す必要がある。

３）の逆行列は、２）と同様な事がいえる。そして、a1*a2-b1*b2=0,なる場合、計算不能になる。

４）のプログラムを用いる解法の場合は、A=B,の係数がなりたつ場合は、その式、以外に、必ず a>b,b>a,なる式が存在しないと、同じ整数倍の係数では、x,y は不確定になる。

が、a=b,の場合に於いても、プログラムを用いて変数ｘ、ｙ、の値を求めることが出来る。

式⑭は、以下のようになる。

x ＋ y ＝ c /a = c/b = f ・・・・・・・・・・⑮

式⑮は,⑬に等しい。

ここで、ｘ＞ｙ、またわ、ｙ＞ｘの条件を与えると、⑬式は、

x ＋ 2ｙ ＝ f’ ・・・・・・・・・⑯

⑯式を得ることが出来る。

そこで、⑯式と⑬式から、For 文をもちいて、同じようにプログラムを組み立てる事が出来る。二通りのＦor 文を作ればよいことである。

しかし、これからの課題として、まだま、多様な解法の手段が残されている。プログラムによる解法にしても、さまざまな、プログラム言語での開発や研究がなされられる。

連立一次方程式の解を、求めるにあたり、様々な研究が数学的に証明される。

５）何故，我われは、この様なプログラムを研究したかと云うと、実際に店に出向いて買い物を行う時に、２つの連立一次方程式を解いて答えを求める事は、その時点で、ｘ、ｙ、の解が分かっていることになる。

然し実際は、買い物を生徒が行う時には、全体の買う数ｆと支払う値段ｃ１と個々の値段、a１、ｂ１である。

この条件に最も、近い式であると考えられるのが、我われプログラムである。と、考えて教育に、プログラムを用いて応用できないか、考えた訳である。

６）店で、分かる範囲の情報は我われの組み立てたプログラムである。そこで、色いろな、買い物を生徒が行う場合を想定して、問題を作り、組み立て、演算し、答えが正解か、不正解の場合の考察力を培うことができる。

７）そこで、此のプログラムの応用として、変数（求めたい数）ｘ、ｙを求める場合、全体の数ｆ、と、a１、ｂ１、とｃ１の値が分かった場合に、は問題はないことが今までの２　本論　と３　考察で分かると考えられる。

そこで、適当な、ｃ１、を与えて、a1,とｂ１、と全体の数ｆ、から、x、ｙの答えを導けるプログラムも可能であると考える。

８）電卓に簡単にプログラムを移植できることがわかる。そこで、例えとして与えられた金額ｃ１と、全体の数 f、が分かると、最適な変数ｘ、ｙを求めることのできるプログラムを研究することこも出来る。

４　結論

小学校から、中学、及び高校の教育に,コンピュータを導入した場合の、教育工学的に、プログラムを組み立てる場合と、解法を求めるうえでの、手計算

や、行列の考え方や、逆行列を求めるうえで、従来,通りの教え方では、コンピュータを理解し、設計し、原理や原則を学び、習得するうえでの教育工学的な柔軟な考えを理解することができる。

本研究は、それらの考え方を習得する為のテキストであると考える。従来の固定概念では、一次連立方程式を解くにあたり、２つの式が、必要であっつたが、コンピュータを、もちいる場合、簡単なプログラムで求める事ができた。

また、１つの一次方程式から求めることもできた。このように、我々の研究の証明ができた。

１）の代入法や、２）の行列で求める場合や、３）の逆行列で求める場合より、アルゴリズムも簡単である事が理解して戴けたと考える。

そこで、生徒のレベルに対応して、設定の場所の店での買い物のプログラムを組み立てて、演算を行わせて、答えを求める。

此の場合、答えが正解か、不正解である場合の考察も行わせると、生徒自身の思考過程が自分でも，どこまで分かっているか、先生も、個々の生徒の理解力も把握できる。

我われの研究は、実際に電卓にも移植可能にもしたことである。予測の最適値を求めるプログラムも組立てることが可能である。

アルゴリズムが、簡単であるために、演算処理力も高いことが分かる。

謝辞　　終始、ご助言を戴いた、KDDI の研究所や、九州大学の関連者や東海大学の関係部署や、九州工業大学の関係者に深謝する。

参考文献

森田　康夫　著作　　"代数概論"　　裳華房　　　1987

斉藤　正彦　著作　　”線形代数入門”　東京大学出版会　　1966

大原　英郁　著作　　”C 言語基礎”　工学社　　2007

Microsoft　　　　Microsoft　Visual C++　2015