J-8

1-parameter 群を用いた一般化円筒の合成法について

On shape synthesis of generalized cynlinders using 1-pamameter groups

長倉 淳士 † Atsushi Nagakura　**金 鐘大** † Kim Jongdae　**趙 晋輝** † Jinhui Chao

1.　まえがき

本稿では、1-pamameter 群と母線の局所的直積から得られる一般化円筒の曲面モデルをについて考察する。本モデルは、線形 Lie 代数の性質から、形状を 6 つの不変な特徴量と母線によって一意に定めることができる。また、形状合成をする際、数値積分を要せずに、高速且つ高精度に行なえる。さらに、不変量を効率的に抽出することができるので、形状の認識合成符号化へ応用することが期待できる。

本稿では、主に曲面モデルと合成方式について考察する。推定については、別項で報告したい。

2.　1-parameter 群と線形リー代数

Definition 1. 多様体 X の変換群 G の中で $G \ni g_t, g_s$、$\forall x \in X$ に対して、 $g_t g_s(\boldsymbol{x}) = g_s g_t(\boldsymbol{x}) = g_{t+s}(\boldsymbol{x})$ を満たす要素の集合を G の *1-parameter* 部分群という。

$GL(n, \mathbb{R})$ の 1-parameter Lie 部分群は、次のように指数写像によって与えられる。但し、A を $n \times n$ の行列とする。

$$T(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

自由曲面を群多様体、即ちリー群とモデル化するとき，上記 Lie 群を変換群として持つ場合、曲面上の 1-parameter Lie 部分群 (即ちフローとなる曲線) は、下記のように定義される。

$$\boldsymbol{x}(t) = T(t)\boldsymbol{x}_0 = e^{tA}\boldsymbol{x}_0$$

ここでは、$\dot{\boldsymbol{x}}_0 = A\boldsymbol{x}_0$ であり, またパラメータ t に対する加法群を成しているので、$\dot{\boldsymbol{x}}_t = Ae^{tA}\boldsymbol{x}_0 = A\boldsymbol{x}_t$. この曲面上の 1-parameter Lie 群の Lie 代数は、線形 Lie 代数であることに注意されたい。

また、もっと一般的に Affine Lie 代数

$$\dot{\boldsymbol{x}}_t = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$$

を考えることもできる。

このような線形 Lie 代数または Affine Lie 代数による 3D 形状のモデルは、完全不変量集合の存在が示されており、その推定法も知られている [1][3]。

3.　一般化円筒と 1-parameter 群による拡張

一般化円筒は、物体形状のモデルとして優れた表現力を有することが古くから知られている。従来 SHGC などの一般化円筒が使われているが、不変量の抽出は簡単ではなく、また形状を一意に定める不変量の完全集合は見つかっていない。

†中央大学 理工学部 電気電子情報通信工学科

本稿では、一般化円筒を、ある母線 (base curve) となる曲線 $B := \{\boldsymbol{b}_v, v \in \mathbb{R}\}$ と 1-parameter Lie group $G = \{e^{uA}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in B, u \in \mathbb{R}\}$ との局所的直積 $\mathcal{C}(u,v) = G(u) \times B(v)$ と定義する。

$$\mathcal{C} := \{\boldsymbol{x}(u,v) = e^{Au}\boldsymbol{b}_v \quad u, v \in \mathbb{R}\}$$

母線 B 上の点は、1-parameter 群となる積分曲線の初期点である。

その Lie 代数は以下のような線形 Lie 代数であることがわかる。

$$\mathcal{L}: \quad \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial u} := \dot{\boldsymbol{x}}_u = A\boldsymbol{x}$$

さらに Affine Lie 代数による一般化円筒は

$$\mathcal{C} := \{\boldsymbol{x}(u,v) = e^{Au}\boldsymbol{b}_v + \boldsymbol{d}_v, \quad u, v \in \mathbb{R}\}$$

と定義する。その Affine Lie 代数は以下となる。

$$\mathcal{L}: \quad \dot{\boldsymbol{x}}_u = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\delta}_v \qquad \boldsymbol{\delta}_v = -A\boldsymbol{d}_v$$

厳密にいうと、このように定義された一般化円筒は、母線 B を base space, 1-parameter Lie 群 $G(u)$ をファイバーとするファイバーバンドルである。

また、認識と合成を同時に議論するときは、以下のモデルを用いることにする。

$$\dot{\boldsymbol{x}}_u = A\boldsymbol{x}_u + \boldsymbol{\delta}, \qquad \boldsymbol{x}(u,v) = e^{uA}\boldsymbol{b}_u + \boldsymbol{d}$$

さらに、母線も 1-parameter 群で生成されたモデルは、以下のように定義することができる。

$$\boldsymbol{x}(u,v) = e^{uA+vB}\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{d}$$

その Lie 代数は、次の二つの線形 Lie 代数からなる。

$$\dot{\boldsymbol{x}}_u = A\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_v = B\boldsymbol{x},$$

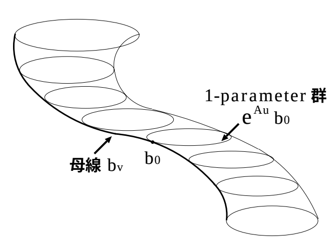


図 1: 1-parameter 群を用いた一般化円筒

4.　逆 Laplacian 変換による合成

1-parameter 群による一般化円筒の利点として、以下の二つが挙げられる。まず、線形 Lie 代数であるため数値積分なしで形状の合成は可能である。また、完全不変量集合が存在し、その抽出とそれによる形状合成は簡単である。以下では、合成法について述べる。

まず、v を固定した曲線

$$\boldsymbol{x}(u,v) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v))^T$$

の u に対する Laplace 変換を $\boldsymbol{X}(p,v)$ とする:

$$\boldsymbol{X}(p,v) = (X_1(p,v), X_2(p,v), X_3(p,v))^T$$

線形 Lie 代数によるファイバーは、$\dot{\boldsymbol{x}}_u = A\boldsymbol{x}$ から、

$$\boldsymbol{X}(p,v) = (pI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0_+, v)$$

の逆 Laplace 変換で積分できる。但し、$\boldsymbol{x}(0_+, v)$ は母線上の初期点である。

ここで $(pI-A)^{-1}$ は、p の有理関数を要素とする 3×3 行列で、その有理関数の分母は高々3 次多項式である。部分式展開の逆 Laplace 変換により、その解を三角関数、指数関数などの初等関数で表すことができるので、形状を数値積分を必要とせずに、高精度で高速に合成できる。

また、Affine Lie 代数 $\dot{\boldsymbol{x}}_u = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d}_v$ によるファイバーは、

$$\boldsymbol{X}(p,v) = (pI - A)^{-1}\boldsymbol{x}(0_+, v) + \frac{1}{p}(pI - A)^{-1}\boldsymbol{d}_v$$

の逆 Laplace 変換によって同様に初等関数で生成できる。

さらに、母線も 1-parameter 群の場合、

$$\boldsymbol{X}(p,v) = (pI - A)^{-1}(\boldsymbol{x}(0,v) + \frac{1}{p}\boldsymbol{d})$$
$$\boldsymbol{X}(u,q) = (qI - B)^{-1}(\boldsymbol{x}(u,0) + \frac{1}{q}\boldsymbol{d})$$

に対する二回の逆 Laplace 変換が必要となる。

5.　ファイバーと行列 A の選び方

以下では、ある曲面上の 1-parameter 群となる曲線をファイバーとするとき、行列 A の一般的な形を示す。

Theorem 1. 曲面の接平面を定める法線ベクトル場 $\boldsymbol{n}$ は線形 *Lie* 代数であるとする。

$$\boldsymbol{n} = M\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

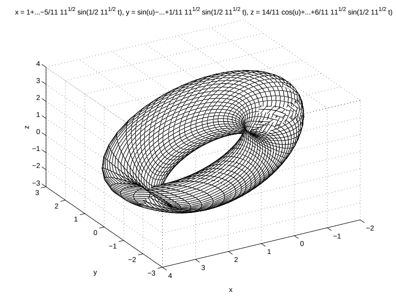
P は、任意の 3×3 交代行列

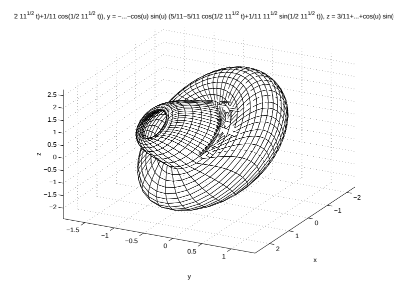
$$P = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、初期点 $\boldsymbol{x}(0)$ における接ベクトルは、$\boldsymbol{t} = PM\boldsymbol{x}$ のような一般形で表すことができる。さらに、交代行列 P によって、初期点 $\boldsymbol{x}(0)$ における接ベクトルの方向が定められる。

従って、行列 $A = PM$ によって定義される指数写像 e^{tA} は、この曲面上の初期点 $\boldsymbol{x}(0)$ を通る任意の *1-parameter* 群を生成する。例えば、M を任意の 3×3 対称行列とし、そのとき積分曲線 $e^{tA}\boldsymbol{x}(0)$ は、二次曲面 $\boldsymbol{x}^T M\boldsymbol{x} = c$ の初期点 $\boldsymbol{x}(0)$ を通る任意断面となる。

6.　Simulations





7.　推定について

上記モデルによる 3D 画像のモデリングを行うとき、必要となる推定法は、別項報告する予定であるが、以下では、関連する事項を簡単にまとめる。

まず、母線の推定について、基本的にファイバーとなる 1-parameter 群と重ならなければ、曲面上の任意断面を母線とすることが可能である。従って、母線の抽出は容易である。

また、不変量の推定と領域分割は、[2] による方法によって行える。

さらに、二重 1-parameter 群によるモデルの推定については、母線は簡単に推定できるため、二つの線形 Lie 代数の推定する必要がなく、一つのファイバーの 1-parameter 群の不変量の推定のみで十分である。

参考文献

[1] 趙、烏谷、箕輪, 電子情報通信学会論文誌 (D-II) Vol.J83-D-II, No.9, pp.1870-1878, 2000 年 9 月

[2] S.Suzuki, J.Chao, To appear in IEICE Trans.D-II.

[3] J.Chao, A.Karasudani, T.Shimada and K.Minowa Proc. of IEEE Int.Workshop on Model-Based 3D Image Analysis, pp.3-12, Jan. 1998.

[4] P. J. Olver, Springer-Verlag, (1986)