J-029

3D オブジェクトの陰関数表現への前処理付反復法の適用

Implicit Surface Reconstruction of 3D Objects Using Preconditioned Iterative Methods

伊東拓 (筑波大学大学院システム情報工学研究科),
北川高嗣 (筑波大学電子・情報工学系), 仲田晋 (立命館大学情報学科)
Taku Itoh, Takashi Kitagawa and Susumu Nakata

1　はじめに

3 次元領域において，n 個の重複のない離散点の集合が与えられたき，これらのデータからある 3 次元形状 (3D オブジェクト) を再構成する問題を考える．本研究では上述の問題において，オブジェクトを陰関数によって表現する方法 [1] を用いる．同方法では陰関数を決定する過程で連立 1 次方程式を解くことになるが，この連立 1 次方程式の係数行列は，疎になるように作ることができる [2]．同連立 1 次方程式の解法としては，係数行列の構造に特化した直接法 [3] が効率的な解法として用いられている．しかしながら直接法による解法は，連立 1 次方程式の大規模化に伴い計算コストの増大をまねく．

そこで本研究では，この連立 1 次方程式の解法に前処理付反復法を導入する．反復法は特に大規模かつ疎な係数行列をもつ連立 1 次方程式の解法に有効とされているため，高速に解が得られる可能性がある．

本研究の目的は，前処理付反復法を上述の連立 1 次方程式の解法に適用し，求解の高速化を図ることにある．

2　オブジェクトの陰関数表現

ここでは，まず 3 次元領域 Ω 内に重複のない n 個の離散点の集合が，$\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n\}$ として与えられているとし，これらの離散点からオブジェクトを再構成することを考える．ただし，$\boldsymbol{p}_i = (x_i, y_i, z_i)^{\mathrm{T}}, (i = 1, 2, \ldots, n)$ であり，$\boldsymbol{p}_i$ は再構成したいオブジェクトの表面 Γ 上の点であるとする．このとき，Γ の妥当な近似となるような Γ' を探す．仮に関数 $f(x, y, z)$ が

$$f(x_i, y_i, z_i) = 0,\ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.1}$$

という条件を満たせば，Γ' は，$f(x, y, z) = 0$ を満たす x, y, z の集合：

$$\{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\} \tag{2.2}$$

として表すことができる．(2.2) で表される Γ' は閉曲面であり，これをオブジェクトの陰関数表現とよぶ．このとき，Γ' の内部および外部において，それぞれ

$$f(x, y, z) > 0,\ f(x, y, z) < 0 \tag{2.3}$$

を満たすことに注意する．

$f(x, y, z)$ を求める際には，まず，与えられた n 個の離散点に，新たに Γ 上にない幾つかの離散点の情報を加え，合計で N 個の離散点の集合にする．このとき，追加した離散点の集合 $\{\boldsymbol{p}_{n+1}, \boldsymbol{p}_{n+2}, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ において，それぞれ $\{h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots, h_N\}$ を定め，

$$f(x_i, y_i, z_i) = h_i,\ (i = n+1, n+2, \ldots, N) \tag{2.4}$$

も $f(x, y, z)$ を決定する際の条件とする．ただし，$\{h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots, h_N\}$ の値は，追加した $\{\boldsymbol{p}_{n+1}, \boldsymbol{p}_{n+2}, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ のそれぞれの位置に応じて，(2.3) に合致するように適切に定める．また，$h_i = 0, (i = 1, 2, \ldots, n)$ とすれば，(2.1) と (2.4) は,

$$f(x_i, y_i, z_i) = h_i, (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{2.5}$$

という条件としてまとめられる．(2.5) を満たす関数を最も滑らかになるように決定すると，$f(x, y, z)$ は放射状基底関数 (Radial Basis Function, RBF)ϕ を用いて,

$$f(x, y, z) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \phi(\|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_i\|_2) + q(\boldsymbol{p}) \tag{2.6}$$

と表せる [1][3]．ただし, $\boldsymbol{p} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$ で, $q(\boldsymbol{p})$ は多項式：

$$q(\boldsymbol{p}) = q_0 + q_1 x + q_2 y + q_3 z$$

である．$\lambda_i (i = 1, 2, \ldots, N)$ と $q_j (j = 0, 1, 2, 3)$ は,

$$\begin{bmatrix} A & P \\ P^{\mathrm{T}} & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{h} \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

を解くことで, 一意に決定できる [1]．ただし, $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ の (i, j) 要素は，$A_{ij} = \phi(\|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|_2), (i = 1, 2, \ldots, N)$ であり，$P \in \mathbb{R}^{N\times 4}$ の第 i 行は，$P_i = [1, x_i, y_i, z_i], (i = 1, 2, \ldots, N)$ である．また，$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^N, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^4$ および $\boldsymbol{h} \in \mathbb{R}^N$ は，それぞれ $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3)^{\mathrm{T}}$ および $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_N)^{\mathrm{T}}$ である．(2.6) の零等値面を描くことで，オブジェクトを再構成することができる．

(2.5) の条件で (2.7) に帰着させると，連立 1 次方程式の規模が大きくなってしまうが，(2.1) の条件は，$\{\boldsymbol{p}_{n+1}, \boldsymbol{p}_{n+2}, \ldots, \boldsymbol{p}_N\}$ と $\{h_{n+1}, h_{n+2}, \ldots, h_N\}$ を適切に定めれば近似的に満たすことが可能である [1]．そのため，(2.4) の条件のみで同様の流れで $f(x, y, z)$ を求めても，零等値面を描くことでオブジェクトの再構成は可能である．本研究でも，(2.4) の条件のみを用いることにする．(2.6) に表れた基底関数 ϕ については，次節で説明する．

3　CSRBF

本節では，(2.6) に表れた基底関数 ϕ として，本研究で使用する CSRBF(Compactly-Supported Radial Basis Function)[2] について述べる．まず，CSRBF は次のように定義される基底関数である．

$$\phi(r) = \begin{cases} g\left(\dfrac{r}{R}\right), & (r \le R), \\ 0, & (r > R), \end{cases}$$

(ただし，$r = \|\boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_j\|_2$, R : サポート半径).

CSRBF はサポート半径 R を設け，ローカルな範囲内でのみ関数 g の値をとるため，(2.7) の係数行列は疎になる．g としては，文献 [2] に幾つか示されているが，本研究ではその中の 1 つである $g(r) = (1 - r)^2$ を使用する．

CSRBF を基底関数に使用した際に表れる連立 1 次方程式の解法としては，文献 [3] の方法が効率的な解法として知られている．しかしながら同方法は，直接法を用いているため係数行列の大規模化に伴い，計算コストの増大をまねく可能性がある．そこで我々は，前処理付反復法を導入して連立 1 次方程式の求解の高速化を図る．次節では，本研究で使用する前処理付反復法について簡単に説明する．

4　前処理付反復法

本節では，本研究で使用する反復法に関して簡単に述べる．本研究では (2.7) を解く際に，Krylov 部分空間反復法に属する，共役勾配法 (Conjugate Gradient method, CG 法) とリスタート周期 m の一般化最小残差法 (Generalized Minimal Residual(m) method, GMRES(m) 法) の適用を考える．CG 法および GMRES(m) 法の前処理としては，不完全 Cholesky 分解前処理 (IC) と可変的前処理 (VP)[4] を用いる．

5　数値実験

本節では，Fig. 1 に示したデータを対象に数値実験を行う．これらのデータ点は $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ に全データが収まるように正規化してある．

反復法の収束判定子 $\varepsilon_{\mathrm{TOL}}$ は，幾つかの数値実験から単精度程度の精度で解が得られれば十分と判断し，$\varepsilon_{\mathrm{TOL}} = 1.0 \times 10^{-8}$ とした．また, 反復法の初期解ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ は，全て $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{0}$ とした．実験環境は，CPU : Pentium III-M 1200MHz, メモリ : 512MBytes, OS : Windows 2000 Professional SP4, コンパイラ : Visual C++ 6.0 Enterprise Edition である．

5.1　オブジェクト再構成の非零要素数依存性

本節では，(2.7) の A に何 % 程度の非零要素があれば，期待したオブジェクトの再構成が行われるかを調べた．幾つかの数値実験により，Case A および B において，それぞれ 2.36[%] および 2.2[%] 程度の非零要素が A に含まれたとき，期待した形状が得られた (Fig. 2 参照). ただし，このときの半径 R は，Case A および B のそれぞれにおいて，0.085 および 0.12 である．次節では，上述の実験結果をもとにして，CPU 時間の比較を行う．

5.2　CPU 時間の比較

ここでは, A が非常に疎な場合に, 従来の方法および前処理付反復法を用いて CPU 時間の比較を行う．ただし, 前節の結果から, Case A および B において, 半径 R はそれぞれ 0.085 および 0.12 とした．前処理付反復法としては，ICCG，ICGMRES(m) および VPGMRES(m) を使用する．ただし，リスタート周期 $m = 50$ とした．また, VPGMRES(m) の内部反復には CR 法を使用し, 内部反復の最大反復回数は 100 回，収束判定子 δ は 0.01 とした．

Table 1．各解法による CPU 時間 [sec].

解法	Case A	Case B
ICCG	3.00	59.66
ICGMRES(m)	2.72	147.10
VPGMRES(m)	60.66	197.32
従来の解法	19.40	284.57

実験結果を Table 1 に示す．Table 1 より, VPGMRES(m) が Case A において従来の解法に比べて CPU 時間を余分に必要としているものの，ICCG と ICGMRES(m) は Case A と B の両方で従来の解法に比べて CPU 時間を減少できた．特に ICCG は，Case A および B 共に安定して高速であった．これらの結果から，係数行列ができるだけ疎になるようにすることで，反復法を有効に適用できる例が確認できた．

6　まとめ

本研究では，重複のない離散点の集合から，3D オブジェクトを再構成する問題を扱った．同問題において，CSRBF を基底に用いた際に生じる連立 1 次方程式に前処理付反復法を適用することによって，求解の高速化を図った．数値実験により，係数行列が非常に疎 (非零要素が 2.2〜2.36[%]) でも，十分な再構成が可能な例を確認し，前処理付反復法の適用によって CPU 時間を抑えることもできた．

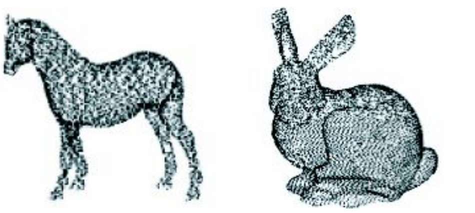
参考文献

[1] Greg Turk and James F. O'brien, "Shape Transformation Using Variational Implicit Functions," The Proceedings of ACM SIGGRAPH 99, Los Angeles, California, pp. 335–342, August 8–13, 1999.

[2] Holder Wendland, "Piecewise Polynomial, Positive Definite and Compactly Supported Radial Functions of Minimal Degree," ACAM, 4, pp. 389–396, 1995.

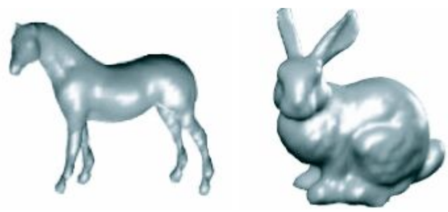
[3] Nikita Kojekine, Vladimir Savchenko, Ichiro Hagiwara, "Surface Reconstruction Based on Compactly Supported Radial Basis Function," Kluwer Science Hawaii'2002 conference paper, 2002.

[4] 阿部邦美, 張紹良, 長谷川秀彦, 姫野龍太郎, "SOR 法を用いた可変的前処理付き一般化共役残差法,"日本応用数理学会論文誌, Vol. 11, No. 4, pp. 157–170, 2001.



(a) Case A(4000点).　(b) Case B(8240点).

Fig. 1．数値実験に使用したデータ.



(a) Case A($R = 0.085$).　(b) Case B($R = 0.12$).

Fig. 2．オブジェクトの再構成結果.