

カラー画像処理のための l^0 - l^2 Color Shrinkage

l^0 - l^2 Color Shrinkage for Color-Image Processing

齊藤 隆弘† 上田 康隆† 小松 隆十
Takahiro Saito Yasutaka Ueda Takashi Komatsu

1. まえがき

変換領域における雑音除去や画像復元において、Hard Shrinkage (硬判定閾値処理) は重要な基礎的技法として用いられてきた[1]. また、Hard Shrinkage によって、Frame を用いた冗長な画像表現から l^0 ノルムを最小とする疎表現が得られる[2]. Hard Shrinkage は元来スカラー信号のために考案されたものであり、カラー画像のように原色信号間に複雑な相互相関関係が存在する場合には、必ずしも良好な結果を与えない. そこで、本研究では、スカラー信号のための Hard Shrinkage を、カラー画像の原色信号間の相互相関関係を積極的に活用したベクトル的な Color Shrinkage へと拡張している. ここでは、この Shrinkage 法を、 l^0 - l^2 Color Shrinkage と呼んでいる.

なお、筆者らは先に、本研究と同様の趣旨で、Soft Shrinkage と Linear Shrinkage をベクトル的な Color Shrinkage へと拡張した手法を考案しているが[3], 疎表現の観点からは本研究の l^0 - l^2 Color Shrinkage がより適しており、また計算量も比較的少なく、実用的な方式である.

2. l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題と Hard Shrinkage

一変数の l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題は次式で定義される.

$$\min_x E(x); E(x) = |x|^0 + \frac{\lambda}{2}(x-x_0)^2, \lambda > 0 \quad (1)$$

ここで、 x_0 は入力、 x は出力である. エネルギー関数 $E(x)$ のグラフは、図 1 のようになる.

この最適化問題は次のようにして解かれる.

- 1) エネルギー関数 $E(x)$ は、 $x = 0$ で不連続である. もし、 $x \neq 0$ ならば、 $E(x)$ は、一変数の二次関数 $1 + \lambda(x-x_0)^2/2$ となり、 $x = x_0$ で最小となる.
- 2) 上記 1) より、最適解 x^* は、 $x^* = x_0$ か $x^* = 0$ のいずれかに限られる. これらを可能解と呼ぶ. いずれの可能解が最適となるかは、エネルギー値 $E(x_0)$, $E(0)$ の大小により決まる.
- 3) $E(x_0) < E(0)$ ならば、最適解 x^* は、 $x^* = x_0$ となる. 一方、 $E(x_0) > E(0)$ ならば、最適解 x^* は、 $x^* = 0$ となる. $E(x_0) = E(0)$ のときは、 $x^* = x_0$ と $x^* = 0$ の両者が最適解となる. このとき、最適解は一意には決まらない.
- 4) 結局、最適解 x^* は、次式の Hard Shrinkage 関数 (硬判定閾値処理関数) によって与えられる.

$$x^* = \text{HS}(x_0; \sqrt{2/\lambda}) = \begin{cases} 0, & \text{if } |x_0| \leq \sqrt{2/\lambda} \\ x_0, & \text{if } |x_0| > \sqrt{2/\lambda} \end{cases} \quad (2)$$

3. 原色間の相互相関を考慮した三変数の l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題と l^0 - l^2 Color Shrinkage

3.1 最適化問題

筆者らが先に文献[3]で提案した手続きと同様の手続きにて、式(1)の一変数の l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題を拡張する. すなわち、カラー画像の原色間に存在する複雑な相互相関関係を活用するため、色差の l^0 ノルムと色和の l^0 ノルムを l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題のエネルギー関数に導入し、変数間の相互相関を考慮した次式の“三変数の l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題”へと拡張する.

$$\min_{r,g,b} F(r,g,b) \quad (3)$$

$$F(r,g,b) = |r|^0 + |g|^0 + |b|^0 + \alpha|r-g|^0 + \beta|r+g|^0 + \alpha|g-b|^0 + \beta|g+b|^0 + \alpha|b-r|^0 + \beta|b+r|^0 + \frac{\lambda_R}{2}(r-r_0)^2 + \frac{\lambda_G}{2}(g-g_0)^2 + \frac{\lambda_B}{2}(b-b_0)^2; \alpha > 0, \beta > 0, \lambda_R > 0, \lambda_G > 0, \lambda_B > 0$$

なお、 (r_0, g_0, b_0) は三原色入力、 (r, g, b) は三原色出力である.

3.2 可能解

式(3)のエネルギー関数 $F(r, g, b)$ には、原点を通る次式の $\{r=0, g=0, b=0, r=g, g=b, b=r, r=-g, g=-b, b=-r\}$

9 個の二次元平面に沿って不連続に断層が入っており、これらの各断層面上では、式(3)の三変数の最適化問題は、二変数 (x, y) に関する次式の形式の最適化問題に帰着する.

$$\min_{x,y} G(x,y) \quad (4)$$

$$G(x,y) = |x|^0 + |y|^0 + \tilde{\alpha}|x-y|^0 + \tilde{\beta}|x+y|^0 + \frac{\lambda_x}{2}(x-x_0)^2 + \frac{\lambda_y}{2}(y-y_0)^2; \tilde{\alpha} > 0, \tilde{\beta} > 0, \lambda_x > 0, \lambda_y > 0$$

ここで、 (x_0, y_0) は入力、 (x, y) は出力である. 式(4)のエネルギー関数 $G(x, y)$ には、原点を通る次式の 4 本の直線

$$\{x=0, y=0, x=y, x=-y\}$$

に沿って不連続に断層が入っており、この断層線上でエネルギー関数 $G(x, y)$ は、原点 $(0, 0)$ を除き、それぞれ異なる二次関数となっている. また、原点は、不連続な特異点となっている. このことより、式(4)の二変数の最適化問題の計 6 個の可能解を以下のようにして列挙することができる.

- 0) 特異点である原点 $(0, 0)$ が一つの可能解となる.
- 1) 断層線以外の領域での可能解: $\{x \neq 0, y \neq 0, x \neq y, x \neq -y\}$ の場合であり、このときエネルギー関数 $G(x, y)$ は $(x, y) = (x_0, y_0)$ で最小値をとる. 結局、可能解は (x_0, y_0) となる.
- 2) 原点を除く断層線 $x=0$ 上での可能解: $\{x=0, y \neq 0\}$ の場合であり、可能解は $(0, y_0)$ となる.
- 3) 原点を除く断層線 $y=0$ 上での可能解: $\{x \neq 0, y=0\}$ の場合であり、可能解は $(x_0, 0)$ となる.
- 4) 原点を除く断層線 $x=y$ 上での可能解: $\{x=y=t, t \neq 0\}$ の場合であり、エネルギー関数 $G(t, t)$ は、

† 神奈川大学

$$t = s_4 = (\lambda_x x_o + \lambda_y y_o) / (\lambda_x + \lambda_y)$$

で最小値をとる。結局、可能解は (s_4, s_4) となる。

5) 原点を除く断層線 $x = -y$ 上での可能解: $\{x = -y = t, t \neq 0\}$ の場合であり、エネルギー関数 $G(t, -t)$ は

$$t = s_5 = (\lambda_x x_o - \lambda_y y_o) / (\lambda_x + \lambda_y)$$

で最小値をとる。結局、可能解は $(s_5, -s_5)$ となる。

三変数のエネルギー関数 $F(r, g, b)$ の各断層面上には6個の可能解が存在する。しかしながら、これらの可能解には互いに重複するものがある。すなわち、異なる二つの断層面の交線は断層線を形成し、この断層線上には必ず二つの断層面に共通な可能解が存在する。また、原点は全ての断層面に共通の可能解である。これらの重複を考慮して可能解を数え上げることで、全ての可能解を列挙することができる。結局、可能解は24個あり、これを $\{\mathbf{c}^{(k)} = (r^{(k)}, g^{(k)}, b^{(k)}); k = 0, 1, \dots, 23\}$ と表記する。以下に24個の可能解を列記する。また、表1には、各断層面について、重複を考慮して全ての可能解を具体的に数え上げた結果を示した。

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^{(0)} &= (0, 0, 0); \mathbf{c}^{(1)} = (r_o, g_o, b_o); \mathbf{c}^{(2)} = (r_o, g_o, 0); \\ \mathbf{c}^{(3)} &= (0, g_o, b_o); \mathbf{c}^{(4)} = (r_o, 0, b_o); \mathbf{c}^{(5)} = (r_o, 0, 0); \\ \mathbf{c}^{(6)} &= (0, g_o, 0); \mathbf{c}^{(7)} = (0, 0, b_o); \\ \mathbf{c}^{(8)} &= (t_8, t_8, t_8), t_8 = (\lambda_R r_o + \lambda_G g_o + \lambda_B b_o) / (\lambda_R + \lambda_G + \lambda_B); \\ \mathbf{c}^{(9)} &= (t_9, -t_9, -t_9), t_9 = (\lambda_R r_o - \lambda_G g_o - \lambda_B b_o) / (\lambda_R + \lambda_G + \lambda_B); \\ \mathbf{c}^{(10)} &= (-t_{10}, t_{10}, -t_{10}), t_{10} = (-\lambda_R r_o + \lambda_G g_o - \lambda_B b_o) / (\lambda_R + \lambda_G + \lambda_B); \\ \mathbf{c}^{(11)} &= (-t_{11}, -t_{11}, t_{11}), t_{11} = (-\lambda_R r_o - \lambda_G g_o + \lambda_B b_o) / (\lambda_R + \lambda_G + \lambda_B); \\ \mathbf{c}^{(12)} &= (t_{12}, t_{12}, 0), t_{12} = \frac{\lambda_R r_o + \lambda_G g_o}{\lambda_R + \lambda_G}; \mathbf{c}^{(13)} = (t_{12}, t_{12}, b_o); \\ \mathbf{c}^{(14)} &= (0, t_{14}, t_{14}), t_{14} = \frac{\lambda_G g_o + \lambda_B b_o}{\lambda_G + \lambda_B}; \mathbf{c}^{(15)} = (r_o, t_{14}, t_{14}); \\ \mathbf{c}^{(16)} &= (t_{16}, 0, t_{16}), t_{16} = \frac{\lambda_B b_o + \lambda_R r_o}{\lambda_B + \lambda_R}; \mathbf{c}^{(17)} = (t_{16}, g_o, t_{16}); \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}^{(18)} = (t_{18}, -t_{18}, 0), t_{18} = \frac{\lambda_R r_o - \lambda_G g_o}{\lambda_R + \lambda_G}; \mathbf{c}^{(19)} = (t_{18}, -t_{18}, b_o);$$

$$\mathbf{c}^{(20)} = (0, t_{20}, -t_{20}), t_{20} = \frac{\lambda_G g_o - \lambda_B b_o}{\lambda_G + \lambda_B}; \mathbf{c}^{(21)} = (r_o, t_{20}, -t_{20});$$

$$\mathbf{c}^{(22)} = (-t_{22}, 0, t_{22}), t_{22} = \frac{\lambda_B b_o - \lambda_R r_o}{\lambda_B + \lambda_R}; \mathbf{c}^{(23)} = (-t_{22}, g_o, t_{22}).$$

なお、式(3)にて $\beta = 0$ として色和の l^0 ノルムの項を除外した場合には、その可能解の集合は、0番から8番までと、12番から17番までの計15個の可能解の集合となる。

3.3 l^0 - l^2 Color Shrinkage

式(3)の三変数の l^0 - l^2 型雑音除去最適化問題の最適解 \mathbf{c}^* を求める演算を簡単な閾値処理演算として記述することはできない。そこで、 l^0 - l^2 Color Shrinkageでは、24個の全ての可能解 $\{\mathbf{c}^{(k)}; k = 0, 1, \dots, 23\}$ について、そのエネルギー値 $\{\phi_k = F(\mathbf{c}^{(k)}); k = 0, 1, \dots, 23\}$ を計算し、24個の可能解から最小のエネルギー値を与える可能解を最適解として出力する。ただし、最小のエネルギー値を与える可能解が複数存在する場合には、複数の可能解からその三要素の内のより多くの要素が0とされている可能解を最適解として選択する。この選択は画像の疎表現の観点から妥当なものである。

4. むすび

現在、 l^0 - l^2 Color Shrinkageの各種のカラー画像処理への応用について検討を加えている。

[参考文献]

- [1]M. Elad, "Why simple shrinkage is still relevant for redundant representations?" IEEE Trans. Information Theory, vol.52, no.12, pp.5559-5569, Dec. 2006.
- [2]L. Marcera, J. Portilla, "L0-norm-based sparse representation through alternate projections," Proc. IEEE ICIP 2006, pp.2089-2092, Oct. 2006.
- [3]齊藤隆弘, 小松 隆, "色相間関を利用した新しい Wavelet Shrinkage 雑音除去法の提案", 電子情報通信学会論文誌, vol.J91-D, no.8, pp. 2005-2008, Aug. 2008.

表1 9個の断層面上での23個の可能解と非断層領域での1個の可能解

非断層領域	可能解	可能解の番号	表1 9個の断層面上での23個の可能解と非断層領域での1個の可能解					
	(r_o, g_o, b_o)	1						
断層面 $r = 0$	可能解	可能解の番号	断層面 $g = 0$	可能解	可能解の番号	断層面 $b = 0$	可能解	可能解の番号
	$(0, 0, 0)$	0		$(0, 0, 0)$	0		$(0, 0, 0)$	0
	$(0, g_o, b_o)$	3		$(r_o, 0, b_o)$	4		$(r_o, g_o, 0)$	2
	$(0, g_o, 0)$	6		$(0, 0, b_o)$	7		$(r_o, 0, 0)$	5
	$(0, 0, b_o)$	7		$(r_o, 0, 0)$	5		$(0, g_o, 0)$	6
	$(0, t_{14}, t_{14})$	14		$(-t_{16}, 0, t_{16})$	16		$(t_{12}, t_{12}, 0)$	12
$(0, t_{20}, -t_{20})$	20	$(-t_{22}, 0, t_{22})$	22	$(t_{18}, -t_{18}, 0)$	18			
断層面 $r = g$	可能解	可能解の番号	断層面 $g = b$	可能解	可能解の番号	断層面 $b = r$	可能解	可能解の番号
	$(0, 0, 0)$	0		$(0, 0, 0)$	0		$(0, 0, 0)$	0
	(t_{12}, t_{12}, b_o)	13		(r_o, t_{14}, t_{14})	15		$(-t_{16}, g_o, t_{16})$	17
	$(0, 0, b_o)$	7		$(r_o, 0, 0)$	5		$(0, g_o, 0)$	6
	$(t_{12}, t_{12}, 0)$	12		$(0, t_{14}, t_{14})$	14		$(-t_{16}, 0, t_{16})$	16
	(t_8, t_8, t_8)	8		(t_8, t_8, t_8)	8		(t_8, t_8, t_8)	8
$(-t_{11}, -t_{11}, t_{11})$	11	$(t_9, -t_9, -t_9)$	9	$(-t_{10}, t_{10}, -t_{10})$	10			
断層面 $r = -g$	可能解	可能解の番号	断層面 $g = -b$	可能解	可能解の番号	断層面 $b = -r$	可能解	可能解の番号
	$(0, 0, 0)$	0		$(0, 0, 0)$	0		$(0, 0, 0)$	0
	$(t_{18}, -t_{18}, b_o)$	19		$(r_o, t_{20}, -t_{20})$	21		$(-t_{22}, g_o, t_{22})$	23
	$(0, 0, b_o)$	7		$(r_o, 0, 0)$	5		$(0, g_o, 0)$	6
	$(t_{18}, -t_{18}, 0)$	18		$(0, t_{20}, -t_{20})$	20		$(-t_{22}, 0, t_{22})$	22
	$(-t_{10}, t_{10}, -t_{10})$	10		$(-t_{11}, -t_{11}, t_{11})$	11		$(t_9, -t_9, -t_9)$	9
$(t_9, -t_9, -t_9)$	9	$(-t_{10}, t_{10}, -t_{10})$	10	$(-t_{11}, -t_{11}, t_{11})$	11			