

## 複素関数を利用した画像のサブサンプリング Subsampling of Images Using Complex Functions

竹内 良亘<sup>†</sup>  
Yoshinobu Takeuchi

### 1. はじめに

連続信号の離散化に際しては、シャノンの標本化定理を満たすようにサンプリング間隔を選ばねばならない。2次元画像の標本化でも同様である。シャノンの標本化定理によると、原信号の周波数帯域が有限のとき、時間軸(画像では空間軸)で無限個のサンプリング点が必要である。これは原信号の有限幅の周波数スペクトルを表現するには、無限個のフーリエ級数展開の項数が必要であるということと同じである。現実問題としては、有限項数で打ち切って近似するから、どれだけ項数を少なくできるかが実用上の問題となる。つまり画像のサンプリング関数による展開を有限個で打ち切る問題となる。この問題は画像を基底画像(2次元基底関数)で展開するとき有限項で打ち切る問題と共通している。

もし、原画像の情報が展開関数やサンプリング点の選び方に付加されるならば、サンプリング点を粗く選び、展開の項数を少なくできる可能性が出てくる。つまりシャノンの標本化定理を満たさないサブサンプリング(アンダーサンプリング)により、原画像を再現できる可能性が出てくる。

本報告では、長方形の画像を複素平面の原点を中心とする半径 1 の単位円内に収めて、そのような画像を展開するための関数として、複素単位円内の直交関数系を構築する。そこには画像の特徴点の複素座標をパラメータとして含ませることができる。また、この提案する関数を使用するとき、複素関数の持つ解析接続の性質を利用すると、サンプリング点を粗く選ぶことができる可能性を示す。

### 2. 複素単位円内の直交関数系

複素単位円内の複素座標を  $z = x + iy$  としたとき、 $z$  の正規直交関数系として、複素単位円内の  $N$  個の複素パラメータ  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  を含む関数系  $\varphi_1(z, \xi), \varphi_2(z, \xi), \dots$  を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= A_0 \\ \psi(z, \xi) &= (z - \xi_1)(z - \xi_2) \cdots (z - \xi_N) \\ \varphi_1(z, \xi) &= A_1 \psi(z, \xi) \\ \varphi_m(z, \xi) &= A_m z^{m-1} \psi(z, \xi) \\ | \xi_1 | < 1, | \xi_2 | < 1, \dots, | \xi_N | < 1, \\ | z | < 1, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad \text{---(1)}$$

これらの関数の内積は円周上を一周する 1 次元積分で定義される。

$$\begin{aligned} &\langle \varphi_m(z, \xi), \varphi_n(z, \xi) \rangle \\ &= \int \overline{\varphi_m(\beta, \xi)} \varphi_n(\beta, \xi) Q(\beta, \xi) d\theta \\ &= 1 (m = n), \quad 0 (m \neq n) \quad \text{---(2)} \end{aligned}$$

ここで、上付きバーは複素共役を意味する。ただし、 $\beta = r \cdot \exp(i\theta)$

$$Q(\beta, \xi) = \overline{\psi(\beta, \xi)} \psi(\beta, \xi)^{-1} \quad \text{---(3)}$$

式(1)の多項式の有用性は、画像をこの関数で展開するとき、画像パターンの選ばれた特徴点を  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  として含ませることができることにある。

式(1)の定数  $A_0, A_1, A_2, \dots$  は正規化の条件から求める。

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 / \sqrt{\langle 1, 1 \rangle} \\ A_m &= 1 / \sqrt{\langle z^{m-1} \psi(z, \xi), z^{m-1} \psi(z, \xi) \rangle} \quad \text{---(4)} \end{aligned}$$

なお、式(2)の内積は式(3)の  $\beta$  から分かるように、半径  $r$  ( $r < 1$ ) における周上で定義している。

それは画像を展開するとき、 $r$  の周上で展開したものを  $r$  をかえて接続していくためである。 $r$  のきざみ(サンプリング)をどれだけ細かくする必要があるかは、解析接続がどれくらい有効かにかかっている。

### 3. 直交関数の定性的説明

上で導入した関数がどのようなものか簡単な例で定性的に説明する。画像の例として 64x64 画素の大きさの正方形の 4 隅に小さい正方形の白パターン(輝度 1)があり、その他の領域は黒(輝度 0)場合で説明する。

図 1 は輝度を立体的に表示したもので、このパターンは輝度範囲が [0, 1] の灰色画像である。この後に示す図 2, 図 3 についても同様である。

式(1)の  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$  は関数のゼロ点であるから、この例の場合の特徴点としては輝度 0 の代表点を選ぶことになる。ここでは  $\xi_1 = \sqrt{2}/4$ ,  $\xi_2 = i\sqrt{2}/4$ ,  $\xi_3 = -\sqrt{2}/4$ ,  $\xi_4 = -i\sqrt{2}/4$  の 4 点を選んだ。原点は  $m = 2, \dots$  において  $z^{m-1}$  に考慮されている。この場合の  $\varphi_5(z, \xi)/A_5$  の実部と虚部の関数値のプロットを下の図 2, 図 3 に示す。

図 2 に示す  $\varphi_5(z, \xi)/A_5$  の実部を見て分かるように、図 1 のパターンの輝度 0 のヶ所を特徴付ける関数となっている。

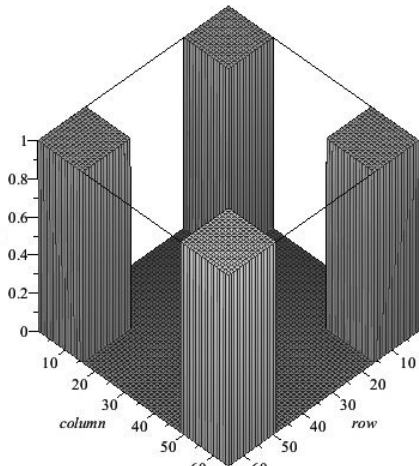


図1 パターン例. 縦軸は輝度, 下平面は空間座標

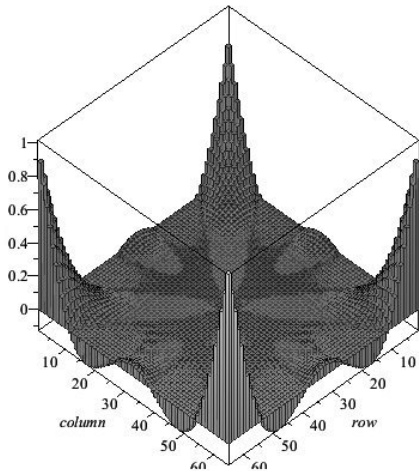


図2 関数  $\phi_5(z, \xi) / A_5$  の実部.

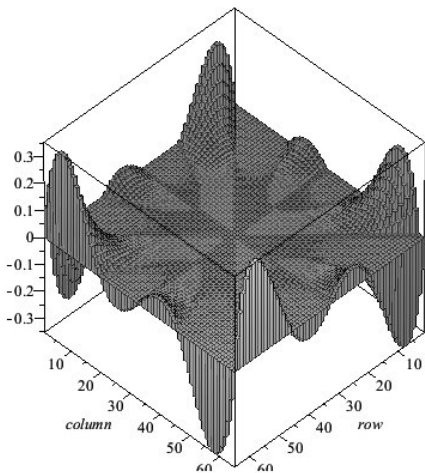


図3 関数  $\phi_5(z, \xi) / A_5$  の虚部

$m$  が大きくなるほど  $\phi_m(z, \xi)$  の周回転に伴う変化は激しくなる. このような変化はフーリエ級数展開の高次項の示す振る舞いと同様である.

#### 4. 解析接続

画像は一般に実数値の輝度分布として与えられるから, 上で準備した複素関数の直交関数系で画像を展開しようとすると, 与えられた実数値画像を複素数値画像へ拡張しなければならない. これには複素関数論が教えてくれる解析接続が役立つ. 解析接続というのは, 座標  $z_1 = x_1 + iy_1$  での実数値関数  $g(x_1, y_1)$  を座標  $z = x + iy$  での複素関数  $f(z)$  へ拡張する理論である. ただし, 与えられた実数値関数を拡張すると, 正則関数である複素関数の実部であるように接続される. 正則関数というのは無限回微分可能な関数である. 画像は微分すると発散するような急峻なエッジなどを含むので, 正則性は期待できない. しかし,  $z_1$  と  $z$  との距離が短ければ実用上解析接続の公式を近似的に使用することができよう. この解析接続の公式は次式で与えられる[1].

$$f(z) = \int (d\theta / (2\pi)) g(x_1, y_1) \cdot (z_1 + z) / (z_1 - z) \quad \text{----(5)}$$

ただし,

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 \exp(i\theta)$$

$$z = r \exp(i\omega) \quad \text{----(6)}$$

前節の例で  $r_1 = 0.8$ ,  $r = 0.8 - 0.1/64$  として  $\omega$  を  $[0, 2\pi]$  の範囲で動かしたときの  $f(z)$  の実部は次のようなグラフである.

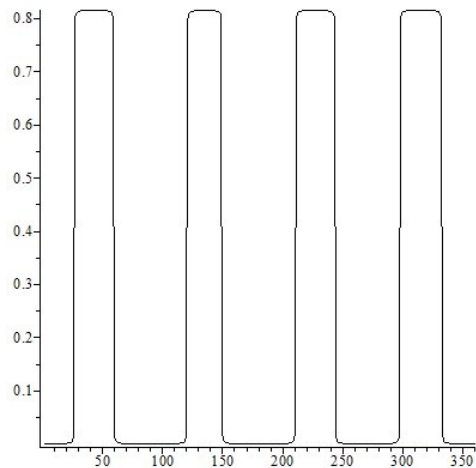


図4 図1の例で半径方向へわずかに離れた位置で解析接続から得られる回転半径  $r = 0.8$  に沿う実部. 縦軸は規格化された輝度の大きさ, 横軸は周に沿う角度.

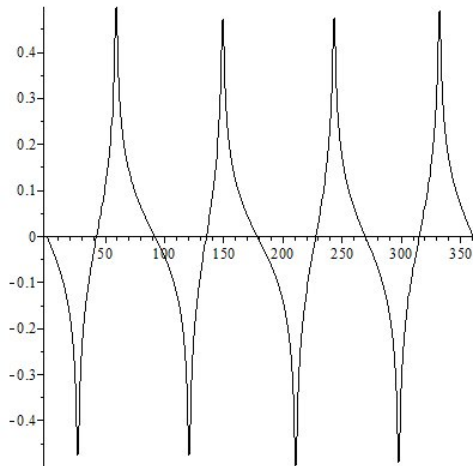


図 5 図 4 に対応する解析接続の虚部. 縦軸は大きさ, 横軸は周に沿う角度.

式(5)から解析接続の数値計算上の問題点が見える. それは  $z_1$  と  $z$  との距離が 0 のとき, 0 による割り算となって数値計算が発散する. 理論的な極限操作では  $g(x_1, y_1)$  に一致することが証明されている[1]. この例では  $r$  と  $r_1$  とをわずかに離して 0 による割り算を避けているが,  $f(z)$  の実部の短冊の大きさは 4 を超えるため, 図 4 では最大値で割り算して規格化している. この解析接続から作られる  $f(z)$  の虚部を図 5 に示す.

### 5. 直交関数展開

解析接続によって複素関数へ拡張された画像  $f(z)$  を第 2 節で導入した直交関数系で展開する.

$$f(z) = c_0 + \sum_{m=1} c_m \varphi_m(z, \xi) \quad \text{-----(7)}$$

ここで展開係数は次式で与えられる.

$$c_0 = \langle \varphi_0, f(z) \rangle$$

$$c_m = \langle \varphi_m(z, \xi), f(z) \rangle$$

$$m = 1, 2, \dots \quad \text{-----(8)}$$

実用上の観点は式(7)の  $m$  をどこで打ち切るかである. 図 4 の例において式(7)を  $m = 20$  で打ち切ったときの  $f(z)$  の実部を図 6 に,  $f(z)$  の虚部を図 7 に示す.

図 6, 図 7 は  $r = 0.8$  での展開であるが, このときの展開を  $r = 0.7$  の周上の係数  $c_0, c_m$  を用いて,  $r = 0.8$  の周上の  $f(z)$  を表現してみる. 係数の数は同じ  $m = 20$  である. これを図 8, 図 9 に示す.

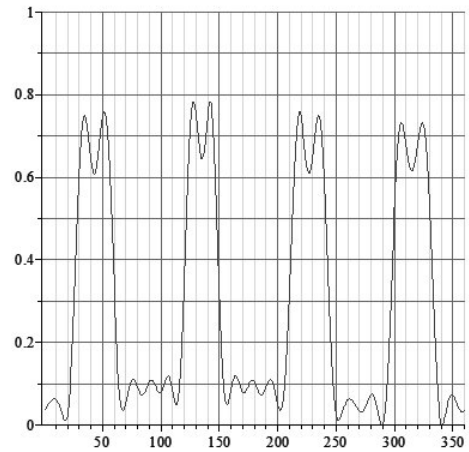


図 6 図 4 の直交関数展開を  $m = 20$  で打ち切った  $f(z)$  の実部.

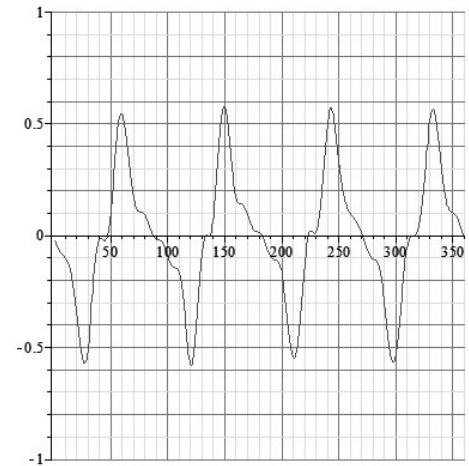


図 7 図 6 に対応する  $f(z)$  の虚部.

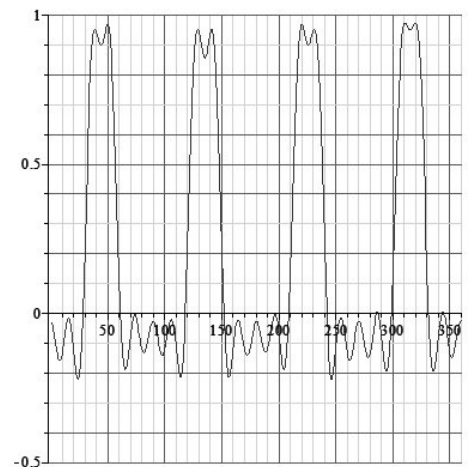


図 8  $r = 0.7$  の周上の係数  $c_0, c_m$  を用いた  $r = 0.8$  の周上の  $f(z)$  実部.

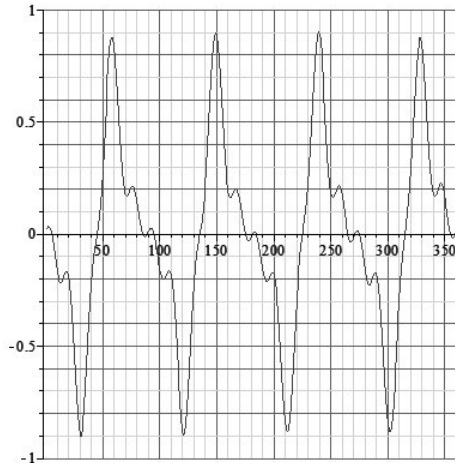


図 9 図 8 に対応する虚部.

実部の図 8 と図 6, 虚部の図 9 と図 7 を比べてみると違いが出ています. 本報告が言いたいところは,  $r=0.7$  の周上の係数  $c_0, c_m$  を用いて,  $r=0.8$  の周上の  $f(z)$  を近似できれば,  $r$  方向のサンプリングを粗くして, アンダーサンプリングの状態画像表現ができる可能性があるということです. これは解析接続の効果である. どの程度の細かさの  $r$  のサンプリングが必要かは, パターンにも依存するので, いろいろなパターンに対して今後の検討が必要である.

もしパターンに関する付加情報  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$  を入れずに, 最も基本となる  $\sqrt{(m+1)/\pi} \cdot z^m$  なる直交関数展開で図 8, 図 9 と同じ事を行うと, 図 10, 図 11 が得られる. 図 8, 9 と図 10, 11 とを比較して, 明らかに付加情報を組み入れた式(1)による展開が優れていることが分かる.

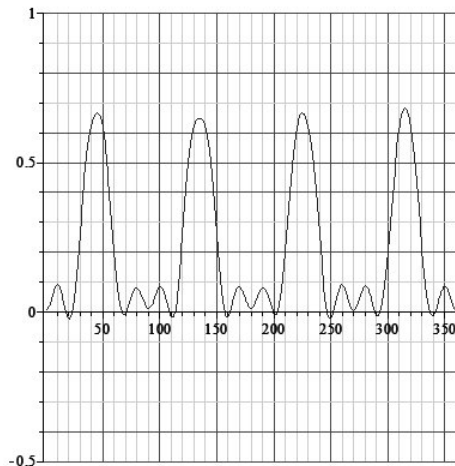


図 10 図 8 と同じことを最も基本的な直交関数式の展開で行った結果の実部.

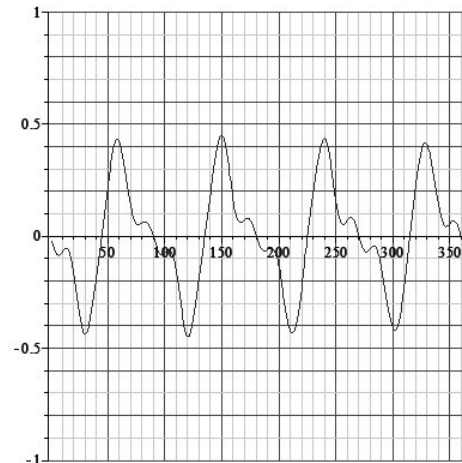
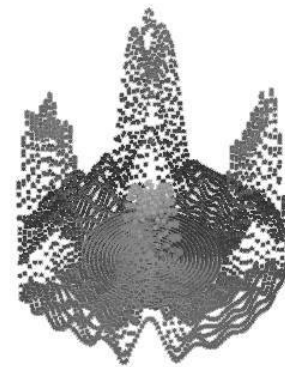


図 11 図 10 に対応する虚部.

以上は,  $r=0.8$  の周上の関数近似の例を示したが,  $r$  を変えていってプロットを繋ぐと, 図 1 に対応する  $m=20$  の関数近似が得られる. この実部を図 12 に示す.

図 12 図 1 の  $m=20$  での関数近似. 実部を示す.

## 6. むすび

画像のサンプリングをサブサンプリング(アンダーサンプリング)で実行するための基本方針を示した. 画像を複素関数へ拡張することにより解析接続が可能となるため, 計算点の省略ができることを示唆した. またそれと合わせて特徴点をパラメータとして含む直交関数系を提案し, その有効性を示した.

今後の課題として, 多くの異なるパターンに対して, パラメータの数を増やして, 直交関数展開のデータを蓄積していくことが必要である.

## 参考文献

- [1]H. カルタン, 高橋礼司訳, 複素関数論, 岩波書店, 1965.