

FDTD 法を用いた時間領域光トモグラフィの像再生時間短縮法の検討 Time Reduction for Image Reconstruction in Time-Resolved Diffused Optical Tomography

北野 健太
Kenta Kitano

松浦 啓文
Takafumi Matsuura

谷藤 忠敏
Tadatoshi Tanifuji

1. まえがき

波長 700–900nm における酸化及び還元ヘモグロビンの光吸収係数差を利用して、近赤外光による生体組織の血中酸素濃度分布同定を行う時間領域拡散光トモグラフィ(TDOT: Time-Resolved Diffused Optical Tomography)実現の可能性が指摘されている^{[1][2]}。TDOT 像を再生するためには、生体の光パルス応答の実測値と理論値の自乗残差で定義される目的関数の最小値を探索する必要がある。本報告は筆者等が定式化した不均一散乱体中の光パルス応答を解析する FDTD 法^[3]に Reverse Differentiation^[1]を適用した TDOT 像再生時間短縮法を提案する。

2. TDOT 像再生法

図 1 に FDTD 法を用いた TDOT の像再生を行うための 2 次元 Yee 格子と光源及び検出器配置を示す。図の k 及び i はそれぞれ z 及び x 軸方向の Yee 格子座標を示す。図 1 の $(0, i_s)$ に設置された各検出器における実測光パルス波形 $Y^n(0, i_s)$ 及び放射発散度で与えられる理論光パルス波形 $\phi^n(0, i_s)$ を用いて、(1)式で定義される目的関数 Φ の最小値を探索する。最小値を与える光学パラメータ分布 $\zeta(k, i)$ が TDOT 像となる。

$$\Phi = \sum_{i_s \in M} \sum_n \frac{[Y^n(0, i_s) - \phi^n(0, i_s)]^2}{2\sigma^n(0, i_s)^2} \quad (1)$$

上式で M は検出位置の集合、 n は FDTD 計算における時刻 $n\Delta t$ 、 $\sigma^n(0, i_s)$ はノイズ標準偏差を示す。Conjugate Gradient 法等による最小値探索を行うためには、(1)式の $\zeta(k, i)$ による全微分を計算する必要がある。実用上重要な 3 次元散乱体の場合は、Yee 格子数が 10^5 個以上となり、個々の光学パラメータによる微分で(1)式の極小値を探索すると膨大な時間を要するため現実的ではない。

3. Reverse Differentiation

目的関数はマトリクス $\zeta(k, i)$ と $\phi^n(k, i)$ で決まるスカラー量である。この場合、スカラー量のマトリクス要素による微分を最初に計算して、次にこの結果得られるベクトルとマトリクス要素相互間の微分の結果生成されるマトリクスの積を計算する Reverse Differentiation により計算量が飛躍的に削減可能である^[1]。

(1)式を $\zeta(k_0, i_0)$ で微分して次式を得る^[1]。

$$\frac{d\Phi}{d\zeta(k_0, i_0)} = \sum_{(k, i)} \frac{d\Phi}{d\phi^n(k, i)} \frac{\partial \phi^n(k, i)}{\partial \zeta(k_0, i_0)} \quad (2)$$

文献[1]では、放射発散度のみを用いた 2 次微分拡散方程式の FDTD 解析を用いて Reverse Differentiation を行っている。以下に筆者等が提案した放射発散度と拡散放射流速の連立 1 次方程式の FDTD 解析を用いた定式化を行う。

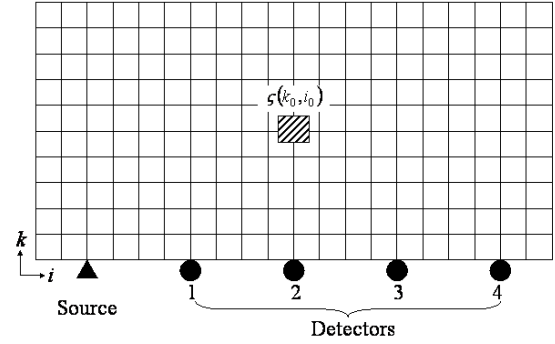


図1 Yee格子と光源・検出器配置

放射発散度 $\phi^n(k, i)$ は時刻 $t=(n+1)\Delta t$ 以降の値に影響を及ぼすため、(2)式右辺第 1 項の微分は次式のように最終時刻 $t=N\Delta t$ から時刻を遡って計算する。

$$\frac{d\Phi}{d\phi^n(k, i)} = \sum_{(k', i')} \frac{d\Phi}{d\phi^{n+1}(k', i')} \frac{d\phi^{n+1}(k', i')}{d\phi^n(k, i)} + \frac{\partial \Phi}{\partial \phi^n(k, i)} \quad (3)$$

$t=N\Delta t$ では、

$$\frac{d\Phi}{d\phi^n(k, i)} = \begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi^n(0, i_s)} = -\frac{Y^n(0, i_s) - \phi^n(0, i_s)}{\sigma^n(0, i_s)^2} & (k, i \in M) \\ 0 & (\text{Otherwise}) \end{cases} \quad (4)$$

が成立するので、 Φ の放射発散度による微分が計算可能となる。(3)式第 2 項は時刻 $n\Delta t \leq t \leq (n+1)\Delta t$ の時間帯で、FDTD 漸化式から拡散放射流速を消去することにより次式で与えられる。

$$\frac{d\phi^n(k', i')}{d\phi^n(k, i)} = \begin{cases} C_2(k, i) - C_{2\delta}(k, i) \left[C_{1\delta}\left(k, i + \frac{1}{2}\right) + C_{1\delta}\left(k, i - \frac{1}{2}\right) \right] + C_{1\delta}\left(k + \frac{1}{2}, i\right) + C_{1\delta}\left(k - \frac{1}{2}, i\right) & (k' = k \cap i' = i) \\ C_{2\delta}(k, i) \times C_{1\delta}\left(k \pm \frac{1}{2}, i \pm \frac{1}{2}\right) & (k' = k \pm 1 \cap i' = i, k' = k \cap i' = i \pm 1) \end{cases} \quad (5)$$

上式の各項は光吸収係数 $\mu_a(k, i)$ 及び輸送減衰係数 $\mu_r(k, i)$ により次式で与えられる^[3]。

$$C_{1\delta}(k \pm 1/2, i \pm 1/2) = \frac{1}{3\delta} \frac{2c\Delta t}{2 + c\Delta t \mu_r(k \pm 1/2, i \pm 1/2)},$$

$$C_2(k, i) = \frac{2 - c\mu_a(k, i)\Delta t}{2 + c\mu_a(k, i)\Delta t}, \quad C_{2\delta}(k, i) = \frac{1}{\delta} \frac{2c\Delta t}{2 + c\Delta t \mu_a(k, i)},$$

$$\delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z \quad (6)$$

(2)式右辺の第 2 項の微分は、FDTD 漸化式で $t \leq n\Delta t$ の放射発散度と拡散放射流速を一定として光学パラメータで偏微分することにより次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{n+1}(k,i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} &= \frac{\partial C_2(k,i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \phi^n(k,i) - \frac{\partial C_{2\delta}(k,i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \left[J_x^{n+\frac{1}{2}}(k,i+\frac{1}{2}) - J_x^{n+\frac{1}{2}}(k,i-\frac{1}{2}) \right] \\ &\quad - \frac{\partial C_{2\delta}(k,i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \left[J_z^{n+\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2},i) - J_z^{n+\frac{1}{2}}(k-\frac{1}{2},i) \right] - C_{2\delta}(k,i) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\partial C_1(k,i+\frac{1}{2})}{\partial \zeta(k_0,i_0)} J_x^{n-\frac{1}{2}}(k,i+\frac{1}{2}) - \frac{\partial C_1(k,i-\frac{1}{2})}{\partial \zeta(k_0,i_0)} J_x^{n-\frac{1}{2}}(k,i-\frac{1}{2}) - \frac{\partial C_{1\delta}(k,i+\frac{1}{2})}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \left[\phi^n(k,i+1) - \phi^n(k,i) \right] + \frac{\partial C_{1\delta}(k,i-\frac{1}{2})}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \times \left[\phi^n(k,i) - \phi^n(k,i-1) \right] \right\} - C_{2\delta}(k,i) \times \\ &\quad \left\{ \frac{\partial C_1(k+\frac{1}{2},i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} J_z^{n-\frac{1}{2}}(k+\frac{1}{2},i) - \frac{\partial C_1(k-\frac{1}{2},i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} J_z^{n-\frac{1}{2}}(k-\frac{1}{2},i) - \frac{\partial C_{1\delta}(k+\frac{1}{2},i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \times \right. \\ &\quad \left. \left[\phi^n(k+1,i) - \phi^n(k,i) \right] + \frac{\partial C_{1\delta}(k-\frac{1}{2},i)}{\partial \zeta(k_0,i_0)} \times \left[\phi^n(k,i) - \phi^n(k-1,i) \right] \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

上式は $t=n\Delta t$ での放射発散度及び $t=(n\pm 1/2)\Delta t$ での拡散放射流速と与えられるので、通常の FDTD ルーチンの中で計算可能である。また(6)式から判るように、上式は $k=k_0\pm 1$ あるいは $i=i_0\pm 1$ の微分のみが値を持つため、計算は通常の FDTD の数倍程度の時間で終了する。

4. 計算アルゴリズムと計算時間

以上のアルゴリズムで(2)式を計算する場合、図 2 に示す以下の方法が考えられる。

(1) **Forward time migration** : FDTD 法による散乱光パルス波形の計算は $t=0$ を起点として順方向に計算する。しかし(3)式は $t=N\Delta t$ を起点として時間を遡り計算する必要がある。このため、FDTD 法による計算に **Forward time migration** を用いると図 2 に示すように、各時刻においてフィールドパラメータを $t=0$ から計算し直す必要がある。これに要する時間は、一定時間間隔でフィールドパラメータ値を蓄積することにより軽減できる。しかし、実際は利用可能なメモリに制限があるので、計算時間の増加は避けられない。

(2) **Reverse time migration** : 上の問題を解決するためには、図 2 に示す **Reverse time migration**^[4]が有効と考えられる。FDTD 法によるフィールドパラメータと放射発散の光学パラメータによる偏微分を $t=N\Delta t$ から時刻を遡って計算する。**Reverse Time Migration** を用いると必要最低限のメモリで目的関数の微分を順方向計算の数倍の時間で完了できる可能性がある。

5. 計算結果

ここで提案した定式化の妥当性を検討するために、図 1 に示す 2 次元散乱体について、(3)-(6)式を用いて目的関数の放射発散度による微分を計算した。Yee 格子座標が (6,20) の格子の吸収係数が 0.02 から 0.06(mm⁻¹)に変化した時の光パルスを実測値とした。図 3 にパルス波形とその変化を示す。なお、散乱係数は全ての格子で 2(mm⁻¹)、また格子サイズは 2mm とした。図 4 は光源及び検出器の Yee 格子座標を 8 及び 14, 20, 26, 30 としたときの微分を示す。図の結果から、 $t=200\Delta t$ ではほとんど全てのノードが目的関数に影響を及ぼし、時間経過とともにそのノード範囲が狭くなっていくことが判る。

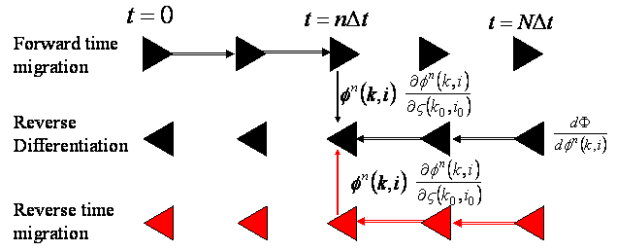


図2 Reverse Differentiationの計算法

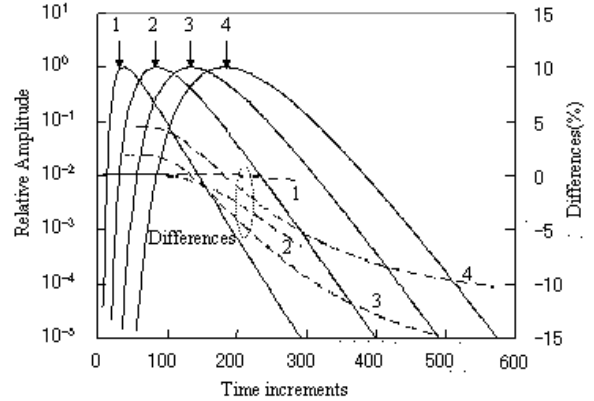


図3 光パルス波形と振幅差

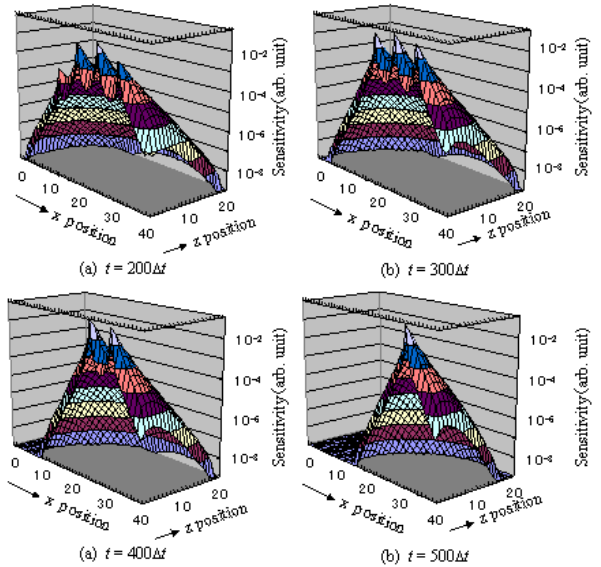


図4 $\partial\Phi/\partial\phi(k,i)$ の時間依存性

6. まとめと今後の課題

TDOT 像再生時間短縮のための定式化を提案した。今回は、本方法と数値微分による目的関数の微分を比較し、その妥当性を検証するとともに、Reverse time migration により現実的な時間で像再生が可能なことを実証する。

参考文献

- [1] A. H. Hielscher *et al.*, IEEE Trans. Medical Imaging, vol.18, No.3, pp.262-271, 1999.
- [2] F. Gao *et al.*, Applied Optics, vol. 41, No.4, pp. 778-791, 2002.
- [3] T. Tanifuji *et al.*, IEEE Trans. Medical Imaging, vol.21, No.2, pp.181-184, 2002.
- [4] 真田佳典, "地中レーダのための高精度モデリングとイメージングに関する研究", 京都大学博士論文, 2002.