F-028

MaxSATの一拡張について
On an Extension of MaxSAT

越村 三幸† 廖 暁鵑† 藤田 博† 長谷川 隆三†
Miyuki Koshimura Xiaojuan Liao Hiroshi Fujita Ryuzo Hasegawa

1. はじめに

MaxSAT[2][6] は SAT（propositional satisfiability problem）[4]を最適化問題向けに拡張したもので，SAT が全ての節を満たす変数の値割当を求めるのに対し，MaxSAT はできるだけ多くの節を満たす変数の値割当を求める．Weighted MaxSAT は，各節に正整数で重みをつけたもので，満たされる節の重みの和が最大になるような変数の値割当を求めることが目的となる．本論文では，一般の論理式に重みをつけられるよう，また重みとして負整数も許す MaxSAT の拡張を考える．そして，このような拡張 MaxSAT の問題を通常の MaxSAT ソルバーを用いて解く手法を提案する．

2. MaxSAT

MaxSAT でも通常の SAT と同じく，命題論理式を CNF（Conjunctive Normal Form）によって表す．CNF は節（clause）の連言（∧）であり，節はリテラル（literal）の選言（∨），リテラルは変数もしくはその否定（¬）である．本論文では，CNF を節の集合と同一視する．つまり，$C_i(i=1,\cdots,n)$が節の時，$C_1 \wedge \cdots \wedge C_n$ と$\{C_1,\cdots,C_n\}$を同じものと見なす．

Weighted Partial MaxSAT（WPM）は，ソフト（soft）節とハード（hard）節からなり，各ソフト節には正整数の重みが付いている．これを$\{(C_1,w_1),\cdots,(C_m,w_m),C_{m+1},\cdots,C_{m+n}\}$と標記することにする．ここで，$C_i(i=1,\cdots,m)$はソフト節で，正整数$w_i(i=1,\cdots,m)$はその重み，$C_j(j=m+1,\cdots,m+n)$はハード節である．WPM の目的は，変数の値割当の中で，全てのハード節を満たし，かつ満たされるソフト節の重みの和が最大となるようなものを見つけることである．

3. 拡張 MaxSAT

「できるだけ多くの節を満たす値割当」を見つけるという MaxSAT の元々の意図からすると節の重みとして正数のみを考えるのは自然である．しかし，現実の問題を MaxSAT を用いて解こうとする場合には，負数の重みも扱えた方が問題を自然に表現できることは多い．そのような時に現状では，問題に応じて正数の重みのみでうまくいくように問題を表現し直す必要がある[1][5]．また，節ではなく一般の論理式に重みがつけられれば，利便性が高まる．

本論文では，一般の論理式に重みがつけられ（これをソフト論理式と呼ぶことにする），重みとして負整数も許すよう WPM を拡張する．そして，この拡張された WPM（Extended WPM: EWPM）から（通常の）WPM への変換手続きを与える．これにより，WPM ソルバーによって EWPM 問題が解けるようになる．また，WPM ソルバーによって得られた解で満たされるソフト節の重みの総和と，元々の EWPM の解で満たされるソフト論理式の総和の関係式も与える．

†九州大学 Kyushu University

4. EWPM と WPM

4. 1 EWPM-to-WPM 変換

$S^{EWPM}=\{(F_1,w_1),\cdots,(F_m,w_m),C_{m+1},\cdots,C_{m+n}\}$を EWPM のインスタンスとする．ここで，$1 \le i \le m$なる$i$について，$F_i$はソフト論理式，$w_i$はその重みで 0 でない整数である．また，$m < j \le m+n$なる$j$について，$C_j$はハード節である．EWPM-to-WPM 変換において，ハード節はそのまま変換（恒等変換）される．ソフト論理式(F_i,w_i)については，S^{EWPM}に現れない変数b_iを用いて次のように変換される．

①. $F_i \to b_i$
②. $b_i \to F_i$
③. $w_i > 0$の時，(b_i,w_i)
 $w_i < 0$の時，$(\neg b_i,-w_i)$

ここで，→ は含意を表す論理結合子で，$(A \to B)=\neg A \vee B$が成立つ．①と②の論理式で，b_iとF_iの真偽値が一致することを表す．①と②は一般には節ではないので，MaxSAT ソルバーで処理できるように充足可能性が等価な複数のハード節に変換される．

4. 2 EWPM 解と WPM 解の関係

前節の変換によってS^{EWPM}がS^{WPM}に変換されるものとする．このとき前者の解と後者の解が一致することを示すために，S^{EWPM}の全てのハード節を充足する値割当とS^{WPM}の全てのハード節を充足する値割当の対応関係を考える．

μ^{EWPM}をS^{EWPM}の全てのハード節を充足する値割当とする．μ^{EWPM}の下で充足するソフト論理式のうち正の重みを持つものがi^P個あるとして$(F_i^P,w_i^P)(i=1,\cdots,i^P)$，負の重みを持つものが$i^N$個あるとして$(F_i^N,w_i^N)(i=1,\cdots,i^N)$と表すことにする．また$\mu^{EWPM}$の下で充足しないソフト論理式で負の重みを持つものがi_{not}^N個あるとして$(notF_i^N,nw_i^N)(i=1,\cdots,i_{not}^N)$と表す．この時，$\mu_{EWPM}$の下で充足するソフト節の重みの総和$W_\mu^{EWPM}$は，$W_\mu^{EWPM}=\sum_{i=1}^{i^P} w_i^P+\sum_{i=1}^{i^N} w_i^N$となる．

さて，μ^{EWPM}をS^{WPM}の全てのハード節を充足するように拡張する．これには，S^{WPM}にありS^{EWPM}にはないハード節，つまり①と②によって導入されたハード節を充足すように変数b_iの真偽値を定めればよい．そのために，F_iが真であればb_iを真に，F_iが偽であればb_iを偽に割当てる．こうして得られたS^{EWPM}の値割当をμ^{WPM}と表記する．ここで，(b_i^P,w_i^P)を(F_i^P,w_i^P)からの変換結果$(i=1,\cdots,i^P)$，$(\neg notb_i^N,-w_i^N)$を$(notF_i^N,nw_i^N)$からの変換結果$(i=1,\cdots,i_{not}^N)$とすると，これらはいずれもμ^{WPM}の下で充足し，また，これら以外のソフト節で充足されるものは無い．したがってμ^{WPM}の下で充足するソフト節の重みの和W_μ^{WPM}は$W_\mu^{WPM}=\sum_{i=1}^{i^P} w_i^P+\sum_{i=1}^{i_{not}^N} -nw_i^N$となる．

Copyright © 2012 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

以上より，W_{μ}^{EWPM} と W_{μ}^{WPM} の差は，

$$W_{\mu}^{EWPM} - W_{\mu}^{WPM} = \sum_{i=1}^{i^N} w_i^N + \sum_{i=1}^{i_{not}^i} nw_i^N$$

となり，これは S^{EWPM} の負の重みを持つソフト論理式の重みの総和と等しい．

次に，S^{WPM} の全てのハード節を充足する値割当 ν^{WPM} を考える． ν^{WPM} から①と②で導入された b_i の値割当を除けば S^{EWPM} の値割当 ν^{EWPM} が得られる．これは明らかに S^{EWPM} の全てのハード節を充足する．ν^{EWPM} の下で充足するソフト論理式の重みの総和 W_{ν}^{EWPM} と ν^{WPM} の下で充足するソフト節の重みの総和 W_{ν}^{WPM} の差は上記と同様の議論により，S^{EWPM} の負の重みを持つソフト論理式の重みの総和と等しい．

以上をまとめると次の定理が得られる．

【定理】

S^{EWPM} を EWPM のインスタンス，S^{WPM} を EWPM-to-WPM 変換によって得られる WPM のインスタンスとする．

そして，μ^{EWPM} を S^{EWPM} の MaxSAT 解，ν^{WPM} を S^{WPM} の MaxSAT 解とする．このとき，μ^{EWPM} によって充足される S^{EWPM} のソフト論理式の重みの総和 W_{μ}^{EWPM} と，ν^{WPM} によって充足される S^{WPM} のソフト節の重みの総和 W_{ν}^{WPM} の差 $W_{\mu}^{EWPM} - W_{\nu}^{WPM}$ は，S^{EWPM} の負の重みを持つソフト論理式の重みの総和と等しい．

定理から，EWPM の MaxSAT 解は EWPM-to-WPM 変換することにより，WPM ソルバーによって求めることができる，ことが分かる．

4.3 変換に関する考察

EWPM-to-WPM 変換では，例えば，負の重みを持つソフト論理式 $(F,-50)$ を F と同値な命題変数 b を導入して正の重みを持つソフト節 $(\neg b,50)$ に変換するが，これは奇異に感じられるかもしれない．$(F,-50)$ を「F が成立てば 50 円の損失」，と解釈すると，$(\neg b,50)$ は，「b つまり F が成立たなければ 50 円の儲け」，と解釈できるからである．変換前のソフト論理式から言えるのは常識的には，「F が成立たなければ損得なし」，であろう．

この奇異さは，最悪の場合に備えて可能性のある最大の損失を予め保証金として支払っておく，と考えることにすれば解消できる．そして，F が成立てば保証金はそのままで，F が成立たなければ保証金から 50 円受け取るものと考えれば良い．可能性のある最大の損失とは，ここでは負の重みを持つソフト論理式の重みの総和である．このように考えると【定理】の正しさも直感的に理解できる．

4.4 変換の冗長性

EWPM-to-WPM 変換において，正数の重みを持つソフト論理式の変換においては，①はなくても定理は成立つ．また負数の重みを持つソフト論理式の変換においては，②はなくても定理は成立つ．これは，次のように示される．

$S_{1^N+2^P+3}^{WPM}$ を正数の重みを持つソフト論理式については①無し，負数の重みを持つソフト論理式については②無しの EWPM-to-WPM 変換によって得られた WPM のインスタンスとする．そして，ν^{WPM} を $S_{1^N+2^P+3}^{WPM}$ の全てのハード節を充足する値割当とする．

ν^{WPM} の下で正数の重みを持つソフト論理式に対応する①が満たされていない，つまり $\exists i(F_i = 1 \wedge b_i = 0)$ と仮定し，i_0 をそのような i，つまり $F_{i_0} = 1 \wedge b_{i_0} = 0$ を満たすもの，する．ここで，ν^{WPM} の b_{i_0} に対する値割当を $b_{i_0} = 1$ に変更した値割当 $\nu_{b_{i_0}=1}^{WPM}$ を考える．この値割当は対応する①を充足するのみならず S_3^{WPM} の全てのハード節も充足することに注意されたい．ここで，ソフト節 (b_{i_0}, w_{i_0}) は，ν^{WPM} の下で充足しないが $\nu_{b_{i_0}=1}^{WPM}$ では充足する．したがって，ν^{WPM} で充足されるソフト節の重みの総和は $\nu_{b_{i_0}=0}^{WPM}$ で充足される重みの総和より w_{i_0} だけ小さい．つまり，②を満たして①を満たさない ν^{WPM} は MaxSAT 解にはなりえない．これは，②を満たす MaxSAT 解は自ずと①も満たすことを意味する．以上より，正数の重みを持つソフト論理式の変換においては①は冗長，つまりあってもなくても良い．同様の議論により，負数の重みを持つソフト論理式の変換においては②は冗長であることが示せる．

ここで示したのは，①あるいは②は MaxSAT 解を求める上では冗長である，ということである．見方を変えると，これらは MaxSAT 解の必要条件を示しているとも考えられるので，MaxSAT ソルバーの効率性には寄与するかもしれない．

5. おわりに

EWPM-to-WPM 変換により，負の重みを持つソフト論理式を正の重みを持つソフト節に変換して，WPM ソルバーによって EWPM の問題を解く手法を提案した．現在，本手法をベースにして協調ゲームの提携構造形成問題の解法に取り組んでいる[3]．この他の問題にも本手法を適用して，MaxSAT の適用範囲を広げていきたい．

本研究では，ソフト論理式の重みを負整数も許すように拡張したが，実際の問題では，重みとして浮動小数点数も扱えると便利である．そのような MaxSAT ソルバーについても考察したい．

謝辞

本研究は，提携構造形成問題の取り組みがきっかけになっている．問題を紹介して頂いた横尾真氏（九州大学）と横尾研の学生の方々に感謝する．本研究は科研費（21300054）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Daisuke Hatano and Katsutoshi Hirayama, “Dynamic SAT with Decision Change Costs: Formalization and Solutions,” In Proc. of IJCAI 2011, pp.560-565, 2011.
[2] Chu Min Li and Felip Manyà, “MaxSAT, Hard and Soft Constraints,” chapter 19, pp.613-631, Handbook of Satisfiability, IOS Press, 2009.
[3] Xiaojuan Liao, Miyuki Koshimura, Hiroshi Fujita, and Ryuzo Hasegawa, “Solving the Coalition Structure Generation Problem with MaxSAT,” 投稿準備中
[4] 井上 克巳，田村 直之，“SAT ソルバーの基礎”，人工知能学会誌，Vol. 25，No. 1，pp.57-67, 2010.
[5] 田中 翔平，岡崎 直観，“Wikipedia を教師データに用いた要約文書収集クエリパターンの学習”，人工知能学会論文誌，26 巻，2 号 B，pp.366-375, 2011.
[6] 平山 勝敏，横尾 真，“*-SAT: SAT の拡張”， 人工知能学会誌，Vol. 25，No. 1，pp.105-113, 2010.

Copyright © 2012 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.