CA-001

バイキューブにおける最短経路選択アルゴリズム
A Shortest-path Routing Algorithm for Bicubes

岡田 将旭†　毛利 考佑†　金子 敬一†
Masaaki Okada　Kousuke Mouri　Keiichi Kaneko

1. はじめに

近年，様々な分野で大規模計算の需要が高まり，超並列計算機に関する研究が盛んである．超並列計算機の相互結合網のために種々の位相が提案されている[1, 2, 3, 4, 5]．バイキューブ[5]はその 1 つであり，ハイパーキューブ[1]の変種である．バイキューブは，ハイパーキューブと同じ次数で，ハイパーキューブの約半分の直径を持ち，頂点対称という優れた性質を持つ．本論文では，バイキューブにおける最短経路選択アルゴリズムを提案することを目的とする．

2. 諸定義

本節では，関連する諸定義と位相の性質を与える．

n次元ハイパーキューブHQ_nは，優れた特徴を持つ相互結合網の位相の 1 つであり，以下の定義を持つ．

定義 1 HQ_nは無向グラフであり，$\{0,1\}^n$を頂点集合とする．各頂点$x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$ は，頂点$x^{(i)} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{i+1}\overline{x_i}x_{i-1}\cdots x_0$ $(n-1 \geq i \geq 0)$と隣接する．

HQ_nの頂点数は2^n，直径はnである．HQ_nは 2 つのHQ_{n-1}から構成される再帰的な構造を持つ．HQ_nは，頂点の次数がnである対称グラフである．

n次元バイキューブBQ_nは，HQ_nを改良した位相である．

定義 2 $x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0 (\in \{0,1\}^n)$に対し，$\sum_{i=0}^{n-1} x_i$が偶数なら$p(u) = 0$，奇数なら$p(u) = 1$となる関数$p(\cdot)$を定義する． $x, y (\in \{0,1\}^n)$に対し，$x = y$かつ$p(x) = p(y) = 0$，または， $x = \bar{y}$かつ$p(x) = p(y) = 1$であるときx, yをlp関係にあるという．

例えば，100110 と 011001 は，lp関係にある．

定義 3 BQ_nは無向グラフであり，$\{0,1\}^n$ $(n \geq 3)$を頂点集合とする．隣接条件は，nの偶奇により異なる．すなわち，nが奇数ならば，各頂点$x = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_0$は，$x_{n-1}$以外の$(n-1)$ビットのうちの 1 ビットだけを反転させて得られる$(n-1)$個の頂点$x^{(i)} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{i+1}\overline{x_i}x_{i-1}\cdots x_0$ $(n-2 \geq i \geq 0)$ に加え，$x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_0$ と lp 関係にある頂点にx_{n-1}を付与した頂点x_{n-1}と隣接する．この辺x, x_{n-1}を全反転辺という．一方，nが偶数ならば，各頂点xには，x_{n-1}以外の$(n-1)$ビットのうちの 1 ビットだけを反転させた$(n-1)$個の頂点$x^{(i)} = x_{n-1}x_{n-2}\cdots x_{i+1}\overline{x_i}x_{i-1}\cdots x_0$ $(n-2 \geq i \geq 0)$に加え，$x_{n-3}x_{n-4}\cdots x_0$とlp関係にある頂点に$\overline{x_{n-1}}x_{n-2}$を付与した頂点$x^{(n-1)}$と隣接する． nの偶奇にかかわらず，$x^{(i)}$をxの第i隣接頂点といい，$x^{(i)}$の第j隣接頂点を$x^{(i,j)}$と表す．

図 1 に，HQ_4, BQ_4を示す．BQ_nの頂点数は2^nで，直径は$\lceil (n+1)/2 \rceil$ $(n \geq 7)$である．一方，BQ_3, BQ_4, BQ_5, BQ_6の直径は，それぞれ，3，4，4，5 である．またBQ_nにおいて，$0x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_0$と$1x_{n-2}x_{n-3}\cdots x_0$の各頂点集合から導出される部分グラフは，各々$HQ_{n-1}$と同型である．すなわち，$BQ_n$は，2 つの$HQ_{n-1}$から構成される．なお，$n$が偶数の場合，$x_{n-1}0x_{n-3}x_{n-4}\cdots x_0$ と $x_{n-1}1x_{n-3}x_{n-4}\cdots x_0$の各頂点集合から導出される部分グラフは，いずれも$BQ_{n-1}$と同型で，$BQ_n$ (n: 偶数)は，2 つのBQ_{n-1}から構成される．BQ_nは，頂点の次数がnである頂点対称グラフである．

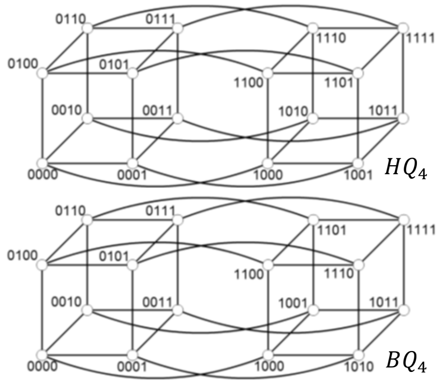

図 1　HQ_4とBQ_4

3. 提案アルゴリズム

本節では，BQ_nにおける最短経路選択アルゴリズムについて述べる．まず，BQ_nにおける出発頂点uと目的頂点vに対し， uの隣接頂点集合のうち，uからvへ至る最短経路上にある頂点の集合を前方隣接頂点集合と呼び，$F(u, v)$と表す．また，u, v間の距離とハミング距離を，それぞれ$d(u, v)$と$h(u, v)$で表す．

我々が提案する最短経路選択アルゴリズムは，出発頂点uと目的頂点vに対し，$F(u, v)$の部分集合を求め，そのうちの 1 つを選択する．この過程を繰り返すことで，最短経路により目的頂点に到達する．定義 3 に示したように，バイキューブは，奇数次元と偶数次元において隣接条件が異なるため，最短経路選択アルゴリズムは，それぞれの次元に対して，異なるアルゴリズムとなっている．

3.1 奇数次元における提案アルゴリズム

BQ_n (n: 奇数)において最短経路を選択する提案アルゴリズム **RO** を図 2 に示す．出発頂点uと目的頂点vに対して，**RO** による経路選択を行うには，**RO**(*u*，*v*) と呼び出す．

アルゴリズム **RO** は，まず， $z = u \oplus v$と$k = h(u, v)$を求める．次に，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$の偶奇によって，$u^{(n-1)}$のビット列が異なるため，場合分けを行う．その後，k とz_{n-1}の値を用いて，さらに場合分けを行う．

例えば，$u = 00011$，$v = 11110$の場合，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数で，$k = n - 1$，$z_{n-1} = 1$なので，$u^{(1)}$が，uの前方隣接頂点となる．

補題 1 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$， $k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数ならば，u, v間の距離$d(u, v)$は以下となる．

$$d(u,v) = \begin{cases} 3 & (k = n) \\ \min\{k, 4\} & (k = n-1, z_{n-1} = 0) \\ 2 & (k = n-1, z_{n-1} = 1) \\ \min\{k, n-k+1\} & (k \leq n-2) \end{cases}$$

† 東京農工大学　Tokyo University of Agriculture and Technology

```
procedure RO(u, v)
z := u ⊕ v;
k := Σ_{i=0}^{n-1} z_i;
if Σ_{i=0}^{n-2} u_i is even then
  if k = n then return {u^{(i)} | n-2 ≥ i ≥ 0}
  else if k = n-1 then
    if z_{n-1} = 0 and n = 3 then
      return {u^{(1)}, u^{(0)}}
    else if z_{n-1} = 0 and n ≥ 5 then
      return {u^{(i)} | n-1 ≥ i ≥ 0}
    else /* z_{n-1} = 1 */ return {u^{(q)} | z_q = 0}
    end if
  else if k > ⌈n/2⌉ then
    if z_{n-1} = 0 and k = n-2 then
      return {u^{(n-1)}}
    else return {u^{(q)} | z_q = 0}
    end if
  else if k = ⌈n/2⌉ then
    return {u^{(i)} | n-1 ≥ i ≥ 0}
  else /* k < ⌈n/2⌉ */
  if z_{n-1} = 1 and k ≤ 2 then
    return {u^{(n-1)}}
  else return {u^{(q)} | z_q = 1}
  end if
else /* Σ_{i=0}^{n-2} u_i is odd */
  if k = n then return {u^{(n-1)}}
  else if k = n-1 then
    if z_{n-1} = 0 and n = 3 then
      return {u^{(1)}, u^{(0)}}
    else if z_{n-1} = 0 and n ≥ 5 then
      return {u^{(i)} | n-1 ≥ i ≥ 0}
    else /* z_{n-1} = 1 */ return {u^{(n-1)}}
    end if
  else if k > ⌈n/2⌉ then
    if z_{n-1} = 0 and k = n-2 then
      return {u^{(n-1)}}
    else if z_{n-1} = 0 and k ≤ n-3 then
      return {u^{(q)} | z_q = 0}
    else /* z_{n-1} = 1 */
      return {u^{(n-1)}, u^{(q)} | z_q = 0}
    end if
  else if k = ⌈n/2⌉ then
    return {u^{(i)} | n-1 ≥ i ≥ 0}
  else /* k < ⌈n/2⌉ */ if z_{n-1} = 0 then
    return {u^{(q)} | z_q = 1}
  else if z_{n-1} = 1 and k = 1 then
    return {u^{(i)} | n-2 ≥ i ≥ 0}
  else /* z_{n-1} = 1 and k ≥ 2 */
    return {u^{(q)} | z_q = 1, q ≠ n-1}
  end if
end if
```

図 2　経路選択アルゴリズム RO

(証明) [5]による．

補題 2 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とすると，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数で，$k = n$ならば$\{u^{(i)} \mid n-2 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$.
(証明) $k = n$より$v = \overline{u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0}$となる．$u^{(i)}(= u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0) = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_{i+1}\overline{u_i}u_{i-1}\cdots u_0$　$(n-2 \geq i \geq 0)$より，$\sum_{j=0}^{n-2} u'_j$は奇数となる．よって，$u^{(i,n-1)} = \overline{u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_{i+1}}u_i\overline{u_{i-1}\cdots u_0} = v^{(i)}$となり，$d(u^{(i,n-1)}, v) = 1$．したがって，$d(u^{(i)}, v) = 2$となる．補題 1 より$d(u,v) = 3$なので，$\{u^{(i)} | n-2 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$となる．

補題 3 BQ_3の 2 頂点$u = u_2u_1u_0, v = v_2v_1v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$\sum_{i=0}^{2} z_i = 2$とする．このとき，$(u_0 + u_1)$が偶数，$z_2 = 0$ならば，$\{u^{(1)}, u^{(0)}\} \subset F(u,v)$.
(証明) $z_2 = 0$よりu, vはHQ_2と同型な同一の部分グラフに属し，$\sum_{i=0}^{2} z_i = 2$より$v = \overline{u_1u_0}$から，$\{u^{(1)}, u^{(0)}\} \subset F(u,v)$.

補題 4 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数，$k = n-1$，$z_{n-1} = 0$，$n \geq 5$ならば，$\{u^{(i)} | n-1 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$となる．
(証明) $k = n-1$，$z_{n-1} = 0$より$u = v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_0}$．$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数なので$u^{(n-1)} = \bar{v}$となり，補題 1 より，$d(u^{(n-1)}, v) = 3$．$u^{(i)} = v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_{i+1}}v_i\overline{v_{i-1}\cdots v_0}$ $(n-2 \geq i \geq 0)$より，$u^{(i,n-1)} = \overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_{i+1}\overline{v_i}v_{i-1}\cdots v_0$．$u^{(i,n-1,i)} = \overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_{i+1}v_iv_{i-1}\cdots v_0 = v^{(n-1)}$から$d(u^{(i,n-1,i)}, v) = 1$なので，$d(u^{(i)}, v) = 3$．よって，$\{u^{(i)} | n-1 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$.

補題 5 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数，$k = n-1$，$z_{n-1} = 1$ならば，$\{u^{(q)} | z_q = 0\} \subset F(u,v)$となる．
(証明) $k = n-1$，$z_{n-1} = 1$より$u = \overline{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{q+1}}v_q\overline{v_{q-1}}$ $(n-2 \geq q \geq 0)$．ここで，$u^{(q)} = \overline{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0}$から$\sum_{j=0}^{n-2} \overline{v_j}$が奇数で，$d(u^{(q)}, v) = 1$．また，$k = n-1$，$z_{n-1} = 1$より，補題 1 から$d(u,v) = 2$で，$\{u^{(q)} | z_q = 0\} \subset F(u,v)$.

補題 6 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数，$k > \lceil n/2 \rceil$，$z_{n-1} = 0$，$k = n-2$ならば，$u^{(n-1)} \in F(u,v)$となる．
(証明) $\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数で，$z_{n-1} = 0$，$k = n-2$より，$u^{(n-1)} = \overline{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{q+1}}v_q\overline{v_{q-1}\cdots v_0}$ $(n-2 \geq q \geq 0)$．ここで補題 1 より$d(u^{(n-1)}, v) = 2$．また，$k = n-2$から補題 1 より$d(u,v) = \min\{k, n-k+1\} = 3$．よって，$u^{(n-1)} \in F(u,v)$.

補題 7 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が偶数，$k \geq \lceil n/2 \rceil$であり，$z_{n-1} = 1$または$k \neq n-2$ならば，$\{u^{(q)} | z_q = 0\} \subset F(u,v)$.
(証明) $z_{n-1} = 0$かつ$k \leq n-3$のとき，補題 1 から，$d(u,v) = \min\{k, n-k+1\} = n-k+1$．$k \geq \lceil n/2 \rceil$より，$k \geq n-k+1$．よって，$v$に到達するまでに全反転辺を通過する必要がある．$u^{(n-1,q,n-1)}$と$v$は$HQ_{n-1}$と同型な同一部分グラフに属する．$h(u^{(n-1,q,n-1)}, v) = n-k-2 = d(u^{(n-1,q,n-1)}, v)$．また，$d(u^{(n-1)}, u^{(n-1,q,n-1)}) = 2$なので，$d(u^{(n-1)}, v) = n-k$．よって，$u^{(n-1)} \in F(u,v)$．一方，$h(u^{(q,n-1)}, v) = n-k-1$ $(z_q = 0, q \neq n-1)$．経路構成中に全反転辺を選ばないよう第$(n-1)$隣接頂点を選択することで，$u^{(q,n-1)}$からvへ至る長さ$n-k-1$の経路を構成可能．$d(u^{(q)}, v) = n-k$より，$\{u^{(q)} | z_q = 0, q \neq n-1\} \subset F(u,v)$.

$z_{n-1} = 1$のとき，$n-2 \geq k \geq \lceil n/2 \rceil$なので，補題 1 より，$d(u,v) = \min\{k, n-k+1\} = n-k+1$．よって，$\lceil n/2 \rceil \geq n-k+1 \geq 3$．$k \geq n-k+1$となるため，$v$に到達するま

でに全反転辺を通過する必要がある．$u^{(q,n-1)}$ $(z_q=0)$とvは，HQ_{n-1}と同型な同一の部分グラフに属する．$h(u^{(q,n-1)}, v)=n-k-1=d(u^{(q,n-1)},v)$．$d(u^{(q)},v)=n-k$より，$\{u^{(q)}|z_q=0\}\subset F(u,v)$となる．

以上より，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が偶数，$k\geq\lceil n/2\rceil$であり，$z_{n-1}=1$または$k\neq n-2$ならば，$\{u^{(q)}|z_q=0\}\subset F(u,v)$となる．

補題 8 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が偶数，$k<\lceil n/2\rceil$，$z_{n-1}=1$，$k\leq 2$ならば，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$となる．

(証明) $k=1$ならば，$u=\overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_0$．$u^{(n-1)}=v$より，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$．$k=2$ならば，$u=\overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_{q+1}\overline{v_q}v_{q-1}\cdots v_0$より，$u^{(n-1)}=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{q+1}\overline{v_q}v_{q-1}\cdots v_0$から，$d(u^{(n-1)},v)=1$．$d(u,v)>1$より，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$.

補題 9 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が偶数，$k\leq\lceil n/2\rceil$であり，$z_{n-1}=0$または$k\geq 3$ならば，$\{u^{(q)}|z_q=1\}\subset F(u,v)$.

(証明) $z_{n-1}=0$のとき，u,vはHQ_{n-1}と同型な同一の部分グラフに属する．$k\leq\lceil n/2\rceil$より，HQ_{n-1}と同様な経路選択を行うことができ，$\{u^{(q)}|z_q=1\}\subset F(u,v)$となる．

$z_{n-1}=1$かつ$k\geq 3$のとき，$u^{(n-1)},v$はHQ_{n-1}と同型な同一の部分グラフに属するため，上記と同様，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$となる．また，$\lceil n/2\rceil\geq k\geq 3$より，補題 1 から，$d(u,v)=\min\{k,n-k+1\}=k$であるので，$v$に到達するまでに全反転辺を通過する必要はない．$h(u^{(q)},v)=k-1$ $(z_q=1,q\neq n-1)$．経路構成中に全反転辺を選ばないよう第$(n-1)$隣接頂点を選択することで，$u^{(q)}$ $(z_q=1,q\neq n-1)$からvへ至る長さ$k-1$の経路を構成可能．したがって，$\{u^{(q)}|z_q=1,q\neq n-1\}\subset F(u,v)$となる．

以上より，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が偶数，$k\leq\lceil n/2\rceil$であり，$z_{n-1}=0$または$k\geq 3$ならば，$\{u^{(q)}|z_q=1\}\subset F(u,v)$となる．

補題 10 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点u,vに対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が偶数，$k=\lceil n/2\rceil$ならば，$\{u^{(i)}|n-1\geq i\geq 0\}\subset F(u,v)$.

(証明) 補題 7，9 より，$\{u^{(i)}|n-1\geq i\geq 0\}\subset F(u,v)$.

補題 11 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とすると，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k=n$ならば，$v^{(n-1)}\in F(u,v)$.

(証明) $k=n$より，$u=\overline{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0}$．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}v_i$が奇数なので，$u$と$v$は隣接し，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$となる．

補題 12 BQ_3の 2 頂点u,vに対して，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$\sum_{i=0}^{2}z_i=2$とする．このとき，$(u_0+u_1)$が奇数，$z_2=0$ならば，$\{u^{(1)},u^{(0)}\}\subset F(u,v)$となる．

(証明) 補題 3 と同様に証明可能.

補題 13 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k=n-1$，$z_{n-1}=0$かつ$n\geq 5$ならば，$\{u^{(i)}|n-1\geq i\geq 0\}\subset F(u,v)$となる．

(証明) $k=n-1$，$z_{n-1}=0$より$u=v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_0}$．$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数より$u^{(n-1)}=\overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_0$で，$u^{(n-1,q)}=\overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_{q+1}\overline{v_q}v_{q-1}\cdots v_0$ $(n-2\geq q\geq 0)$．$u^{(n-1,q,n-1)}=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{q+1}\overline{v_q}v_{q-1}\cdots v_0$で，$d(u^{(n-1,q,n-1)},v)=1$，$d(u^{(n-1)},v)=3$．また，$\{u^{(i)}|n-2\geq i\geq 0\}=\{v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_{i+1}}v_i\overline{v_{i-1}\cdots v_0}\mid n-2\geq i\geq 0\}$となり，補題 1 より$d(u^{(i)},v)=3$ $(n-2\geq i\geq 0)$．以上より，$\{u^{(i)}|n-1\geq i\geq 0\}\subset F(u,v)$.

補題 14 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k=n-1$かつ$z_{n-1}=1$ならば，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$となる．

(証明) $k=n-1$かつ$z_{n-1}=1$より，$u=\overline{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{q+1}}v_q\overline{v_{q-1}\cdots v_0}$ $(n-2\geq q\geq 0)$となる．このとき，$u^{(n-1)}=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{q+1}\overline{v_q}v_{q-1}\cdots v_0$ $(n-2\geq q\geq 0)$となるため，$u^{(n-1)}$とvは隣接する．一方，$u^{(i)}$ $(n-2\geq i\geq 0)$はいずれもvと隣接しない．よって，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$となる．

補題 15 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k>\lceil n/2\rceil$，$z_{n-1}=0$かつ$k=n-2$ならば，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$となる．

(証明) $\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$z_{n-1}=0$かつ$k=n-2$より，$u=v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_{q+1}}v_q\overline{v_{q-1}\cdots v_0}$ $(n-2\geq q\geq 0)$なので，$u^{(n-1)}=\overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_{q+1}\overline{v_q}v_{q-1}\cdots v_0$．このとき，$u^{(n-1,q)}=\overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_0$となり，$u^{(n-1,q)},v$は隣接する．よって，$d(u^{(n-1)},v)=2$．一方，$u^{(q)}=v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_0}$なので，補題 1 より$d(u^{(q)},v)=4$．また，$u^{(n-1)}$，$u^{(q)}$以外の$u$の隣接頂点と$v$の距離は補題 1 より$4$である．以上より，$u^{(n-1)}\in F(u,v)$.

補題 16 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k\geq\lceil n/2\rceil$，$z_{n-1}=0$かつ$k\leq n-3$ならば，$\{u^{(q)}|z_q=0\}\subset F(u,v)$となる．

(証明) $u^{(n-1)}=u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$に対し，$\sum_{i=0}^{n-2}u'_i$が奇数なので，$h(u^{(n-1)},v)=n-k$．また，$h(u^{(n-1,q)},v)=n-k-1$ $(z_q=1,q\neq n-1)$．$k\geq\lceil n/2\rceil$より，$n-k-1\leq\lfloor n/2\rfloor-1$なので，補題 1 より$d(u^{(n-1,q)},v)=\min\{n-k-1,k+2\}=n-k-1$．よって，$d(u^{(n-1)},v)=n-k$．

$u^{(q)}=u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$ $(z_q=0,q\neq n-1)$に対し$\sum_{i=0}^{n-2}u'_i$は偶数．$h(u^{(q)},v)=k+1$と$n-3\geq k\geq\lceil n/2\rceil$より，補題 1 から$d(u^{(q)},v)=\min\{k+1,n-k\}=n-k$．

$u^{(q)}=u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$ $(z_q=1)$に対し$\sum_{i=0}^{n-2}u'_i$は偶数．$h(u^{(q)},v)=k-1$と$n-3\geq k\geq\lceil n/2\rceil$より，$n-3\geq k\geq\lceil n/2\rceil+1$のとき，補題 1 から$d(u^{(q)},v)=\min\{k-1,n-k+2\}=n-k+2$．$k=\lceil n/2\rceil$のとき，補題 1 から$d(u^{(q)},v)=\min\{k-1,n-k+2\}=k-1=\lceil n/2\rceil-1=n-k$.

以上より，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k\geq\lceil n/2\rceil$，$z_{n-1}=0$かつ$k\leq n-3$ならば，$\{u^{(q)}|z_q=0\}\subset F(u,v)$.

補題 17 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z=z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0=u\oplus v$，$k=\sum_{i=0}^{n-1}z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2}u_i$が奇数，$k\geq\lceil n/2\rceil$，$z_{n-1}=1$ならば，$\{u^{(n-1)},u^{(q)}|z_q=0\}\subset F(u,v)$となる．

(証明) $u^{(n-1)}=u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$に対し，$\sum_{i=0}^{n-2}u'_i$が奇数より，$h(u^{(n-1)},v)=n-k$．$k\geq\lceil n/2\rceil$より，$n-k\leq\lfloor n/2\rfloor$．また，$u^{(n-1)},v$は$HQ_{n-1}$と同型な同一の部分グラフに属するので，$HQ_{n-1}$と同様な経路選択で，$d(u^{(n-1)},v)=n-k$．

$u^{(q)}=u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$ $(z_q=0)$に対し，$\sum_{i=0}^{n-2}u'_i$は偶数．また，$h(u^{(q)},v)=k+1$．このとき，$n-2\geq k\geq\lceil n/2\rceil$より，$k=n-2$のとき，補題 1 から$d(u^{(q)},v)=2$．$n-2>k\geq\lceil n/2\rceil$のとき，補題 1 から$d(u^{(q)},v)=n-k$.

$u^{(q)} = u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$ $(z_q = 1, q \neq n-1)$ に対し，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i{}^{(q)}$は偶数．$h(u^{(q)}, v) = k-1$．このとき，$n-2 \geq k \geq \lceil n/2 \rceil$より，$k = \lceil n/2 \rceil$のとき，補題 1 から，$d(u^{(q)}, v) = \min\{k-1, n-k+2\} = \min\{\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor + 2\} = \lfloor n/2 \rfloor = n-k$．$n-2 \geq k > \lceil n/2 \rceil$のとき，補題 1 より，$d(u^{(q)}, v) = \min\{k-1, n-k+2\} = n-k+2 > n-k$.

以上より，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数，$k \geq \lceil n/2 \rceil$，$z_{n-1} = 1$ならば，$\{u^{(n-1)}, u^{(q)} | z_q = 0\} \subset F(u,v)$となる．

補題 18 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数，$k \leq \lceil n/2 \rceil$，$z_{n-1} = 0$ならば，$\{u^{(q)} | z_q = 1\} \subset F(u,v)$となる．

(証明) $z_{n-1} = 0$のとき，u, vはHQ_{n-1}と同型な同一の部分グラフに属する．$k \leq \lceil n/2 \rceil$より，HQ_{n-1}と同様な経路選択を行うことができ，$\{u^{(q)} | z_q = 1\} \subset F(u,v)$となる．

補題 19 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1} v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数，$k < \lceil n/2 \rceil$，$z_{n-1} = 1$かつ$k = 1$ならば，$\{u^{(i)} | n-2 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$となる．

(証明) $z_{n-1} = 1$かつ$k = 1$より，$u = \overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_0$．このとき，$u^{(i)} = \overline{v_{n-1}}v_{n-2}\cdots v_{i+1}\overline{v_i}v_{i-1}\cdots v_0$ $(n-2 \geq i \geq 0)$．$u^{(i,n-1)} = v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_{i+1}\overline{v_i}v_{i-1}\cdots v_0$で，$u^{(i,n-1)}, v$は隣接する．よって，$d(u^{(i)}, v) = 2$．また，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数なので，$u^{(n-1)} = v_{n-1}\overline{v_{n-2}\cdots v_0}$．このとき，補題 12 の証明より$d(u^{(n-1)}, v) = 4$．以上より，$\{u^{(i)} | n-2 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$.

補題 20 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v = v_{n-1} v_{n-2}\cdots v_0$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数，$k \leq \lceil n/2 \rceil$，$z_{n-1} = 1$かつ$k \geq 2$ならば，$\{u^{(q)} | z_q = 1, q \neq n-1\} \subset F(u,v)$となる．

(証明) $u^{(q)} = u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$ $(z_q = 1, q \neq n-1)$に対し，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数なので$\sum_{i=0}^{n-2} u'_i$は偶数．$h(u^{(q)}, v) = k-1$と$\lceil n/2 \rceil \geq k \geq 2$より，補題 1 から，$d(u^{(q)}, v) = \min\{k-1, n-k\} = k-1$である．

$u^{(n-1)}$に対し，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数なので$h(u^{(n-1)}, v) = n-k$．$\lceil n/2 \rceil \geq k \geq 2$より $n-2 \geq n-k \geq \lfloor n/2 \rfloor$．$n-2 \geq n-k > \lfloor n/2 \rfloor$のとき，補題 15，16 より$u \in F(u^{(n-1)}, v)$．よって，$u^{(n-1)} \notin F(u,v)$．$n-k = \lfloor n/2 \rfloor$のとき，$k = \lceil n/2 \rceil$と補題 18 の証明より，$d(u^{(n-1)}, v) = n-k = k-1 = \lfloor n/2 \rfloor$.

$u^{(q)} = u'_{n-1}u'_{n-2}\cdots u'_0$ $(z_q = 0)$に対し，$\sum_{i=0}^{n-2} u'_i$は偶数．また，$h(u^{(q)}, v) = k+1$．このとき，$\lceil n/2 \rceil \geq k \geq 2$より，$\lceil n/2 \rceil > k \geq 2$のとき，補題 1 から$d(u^{(q)}, v) = \min\{k+1, n-k\} = k+1$．$k = \lceil n/2 \rceil$のとき，補題 1 から$d(u^{(q)}, v) = \min\{k+1, n-k\} = n-k = k-1 = \lfloor n/2 \rfloor$.

以上より，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数，$k \leq \lceil n/2 \rceil$，$z_{n-1} = 1$かつ$k \geq 2$ならば，$\{u^{(q)} | z_q = 1, q \neq n-1\} \subset F(u,v)$.

補題 21 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点$u = u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0, v$に対し，$z = z_{n-1}z_{n-2}\cdots z_0 = u \oplus v$，$k = \sum_{i=0}^{n-1} z_i$とする．このとき，$\sum_{i=0}^{n-2} u_i$が奇数，$k = \lceil n/2 \rceil$ならば，$\{u^{(i)} | n-1 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$となる．

(証明) 補題 16，17，18，20 より$\{u^{(i)} | n-1 \geq i \geq 0\} \subset F(u,v)$.

命題 1 BQ_n (n: 奇数)の 2 頂点u, vに対し，アルゴリズム **RO** は，$F(u,v)$の空でない部分集合を時間計算量 $O(n)$で与える．

(証明) $F(u,v)$の空でない部分集合を与えることは，補題 2 から 21 により明らか．zやkは，$O(n)$時間で計算可能である．場合分けに，$O(1)$時間かかる．さらに，前方隣接頂点集合は，配列を用いて$v^{(i)}$の添字iのみを戻せばよいので，$O(n)$時間かかる．したがって，全体として，$O(n)$時間で$F(u,v)$の空でない部分集合を求めることができる．

3.2 偶数次元における提案アルゴリズム

BQ_n (n: 偶数)において最短経路を選択する提案アルゴリズム **RE** を図 3 に示す．出発頂点uと目的頂点vに対して，**RE** による経路選択を行うには，**RE(**u, v**)** と呼び出す．

```
procedure RE(u, v)
if z_{n-2} = 0 then begin
  X := RO(u_{n-1}u_{n-3}···u_0, v_{n-1}v_{n-3}···v_0);
  if X = {u^(n-2)} then return {u^(n-1)}
  else return X
  end if
end else /* z_{n-2} = 1 */ return {u^(n-2)}
end if
```

図 3　経路選択アルゴリズム RE

アルゴリズム **RE** は，まず，$z = u \oplus v$を求める．次に，$z_{n-2} = 0$ならば，uとvが同じBQ_{n-1}に存在するため，**RO(**$u_{n-1}u_{n-3}\cdots u_0$, $v_{n-1}v_{n-3}\cdots v_0$**)** によって経路選択を行う．もし，その結果が$\{u^{(n-2)}\}$ならば，**RE(**u, v**)** の結果は，$\{u^{(n-1)}\}$となる．一方，$z_{n-2} = 1$ならば，$\{u^{(n-2)}\}$が結果となる．その後，**RO** を用いて経路選択を行う．

例えば，$u = 000011, v = 101101$の場合，$z_{n-2} = 0$より **RO** を呼び出す．$u = 010011, v = 101101$の場合，$z_{n-2} = 1$より$\{u^{(n-2)}\}$が結果となる．

命題 1 と同様に命題 2 を証明することができる．

命題 2 BQ_n (n: 偶数)の 2 頂点u, vに対し，アルゴリズム **RE** は，$F(u,v)$の空でない部分集合を時間計算量$O(n)$で与える．

4. 結論と今後の課題

本論文でn次元バイキューブBQ_nに対する最短経路選択アルゴリズムを提案し，その正しさを証明し，時間計算量$O(n^2)$を示した．提案アルゴリズムは，出発頂点uと目的頂点vを取り，uの隣接頂点の中から，vへの最短経路上にある前方隣接頂点を見つけ，これを選択することを反復して，最短経路を構成する．すべての前方隣接頂点を見つけるよう，提案アルゴリズムを改良することが今後の課題である．

謝辞

本研究の一部は，日本学術振興会科学研究費補助金（基盤研究(C)，課題番号17K00093，19K11887）による．

参考文献

[1] C. L. Seitz, “The Cosmic Cube”, *Communications of the ACM*, Vol. 28, No. 1 (1985).
[2] P. Cull and S. M. Larson, “The Möbius Cubes”, *IEEE Transactions on Computers*, Vol. 44, No. 5 (1995).
[3] K. Efe, “The Crossed Cube Architecture for Parallel Computation”, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol. 3, No. 5 (1992).
[4] A. El-Amawy and S. Latifi, “Properties and Performance of Folded Hypercubes”, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, Vol. 2, No. 1 (1991).
[5] H.-S. Lim, J.-H. Park, and H.-C. Kim, “The Bicube: An Interconnection of Two Hypercubes”, *International Journal of Computer Mathematics*, Vol. 92, No. 1 (2015).