A-042

p-median 問題に対するアントアルゴリズムの適用
An Ant Algorithm for Solving the P-Median Problem

山本 浩司 † 土屋 達弘 † 菊野 亨 †
Hiroshi Yamamoto Tatsuhiro Tsuchiya Tohru Kikuno

1. まえがき

p メディアン問題はオペレーションリサーチの分野において多くの実用問題を解く上で利用されている．文献 [3] より，この問題の存在証明問題は NP 完全であり，最適化問題は NP 困難であることが知られている．本研究では，p メディアン問題，及び容量制約 p メディアン問題の最適化問題に対し，蟻の生態行動を模倣したヒューリスティック探索手法であるアントアルゴリズムを適用した結果を報告する．

2. p メディアン問題と拡張問題の定式化

p メディアン問題は，グラフ $G = (V, E)$ の $n = |V|$ 個のノードから，全ノードのコストの和を最小にするように p 個の施設ノードを決定する問題である．ここで各ノード u は， p 個の施設ノードの内のただ一つの施設ノード v に割り当てられ，その割当コストは u の重みと u から v までの距離の積である．この割当コストを d_{uv} として，以下にこの問題の定式化を示す．

目的関数 最小化 $$\sum_{u\in V}\sum_{v\in V} d_{uv}x_{uv}$$

制約条件 $$\forall u \in V, \quad \sum_{v\in V} x_{uv} = 1$$

$$\sum_{v\in V} y_v = p$$

$$\forall u, v \in V, \quad x_{uv} \le y_v$$

$$\forall u, v \in V, \quad x_{uv}, y_v \in \{0, 1\}$$

また，各ノードに需要量と供給量を与え，以下の制約条件を加えたものを容量制約 p メディアン問題と呼ぶ．

$$\forall v \in V, \quad \sum_{u\in V} a_u x_{uv} \le C_v$$

この制約は，施設ノード v に割り当てられた各ノード u の需要量 a_u の総和はノード v の生産容量 C_v を上回ってはならないことを意味している．

3. 提案するアントアルゴリズム

本節では，提案したアントアルゴリズムの説明を行う．アントアルゴリズムは文献 [2] において *Dorigo* らにより提案された，フェロモンフィードバックを利用し準最適解を得る確率的多点探索手法である．提案アルゴリズムの概要を図 1 に示す．

†大阪大学大学院情報科学研究科情報システム工学専攻

```
Begin
 Repeat{   //サイクルの開始
   For k:=1 to m   // m 匹の蟻により実行
      初期化：
        V^k = {v_1, v_2, ..., v_n}
        F^k = {}
      For l:=1 to p
         各 v_i について P_{v_i} の計算
         確率 P_{v_i} でノード v_i の選択
         V^k = V^k \ {v_i}
         F^k = F^k ∪ {v_i}
      End_For   // p 個の施設ノードを選択完了
      蟻 k が得た施設集合 F^k より目的関数値を計算
   End_For
   フェロモンの更新
 }Until フェロモンが収斂するまで
End.
```

図 1: 適用したアントアルゴリズム

アントアルゴリズムでは，蟻の移動が模倣され，その経路が解に対応するように設計される．図 2 では提案アルゴリズムでの蟻の動きを示しており，各蟻は n 個の辺の内の一つを進むことで，グラフ G のノードを一つ選択して新しい頂点に移動する．異なるノードを p 個選択して蟻は探索を終了する．k 匹目の蟻が選択したノードの集合を F^k で表す．各蟻は F^k に含まれているノードに対応する図 2 の辺すべてに同量のフェロモンを残し，その他のノードに対応する辺にはフェロモンを付与しないものとする．

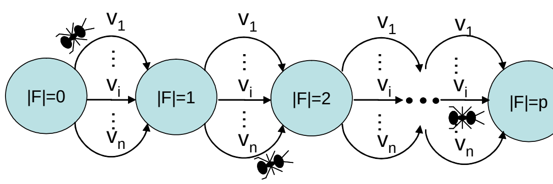

図 2: アントアルゴリズムの図示

t 回目の実行サイクルにおいて，k 番目の蟻が得た目的関数値を L^k とすると，この蟻がノード v に対応する辺に残すフェロモンの量 $\tau_v^k(t)$ は以下の様に L^k に反比例するように定める．つまり，より小さい目的関数値を導く蟻ほど多量のフェロモンを付与する．

$$\triangle{\tau_v}^k(t) = \begin{cases} \frac{Const}{L^k} & if \quad v \in F^k \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

フェロモンは実行サイクルが 1 増す毎に蒸発率 ρ で蒸発する．これより，サイクル $t+1$ でノード v に対応する辺に残されるフェロモンの量 $\tau_v(t+1)$ は以下に与

えられる.

$$\tau_v(t+1) = (1-\rho)\cdot\tau_v(t) + \sum_{k=1}^{m} \triangle{\tau_v}^k(t)$$

蟻は移動する辺をランダムに選択するが，フェロモンの量が大きい辺を高い確率で選択する．ただし，フェロモンとは別に，未だ選択されていない各ノードについて，そのノードを施設ノードとして選択した場合のコストを計算し，その値も選択確率に反映させる．ノード v_i に対応する辺を選択する確率 P_{v_i} を以下の通りに定める．

$$P_{v_i} = \begin{cases} \dfrac{{\tau_{v_i}}^{\alpha}{\eta_{v_i}}^{\beta}}{\sum_{v_j\in V^k}{\tau_{v_j}}^{\alpha}{\eta_{v_j}}^{\beta}} & if \quad v_i \in V^k \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\eta_{v_i} = \frac{\frac{1}{\sum_{u\in V^k\setminus\{v_i\}} d_{uv_i}}}{\sum_{v_j\in V^k}\frac{1}{\sum_{u\in V^k\setminus\{v_j\}} d_{uv_j}}}$$

これらの仕組みにより，実行を繰り返すと良好な目的関数値を導く施設ノードに対応する辺にはフェロモンが多く残り，多くの蟻がこれらの辺に従うようになる．この状況をフェロモンの収斂と呼ぶが，提案アルゴリズムにおいては各サイクルで m 匹の蟻によって得られた目的関数値の最小値が，複数サイクルに及んで同じ値であった場合に収斂と判断し，アルゴリズムを停止する．

更に，$Max-Min$ Ant System [5] にならい，フェロモンの総量に上限と下限を設け，フェロモンの早期集中による多様性喪失の可能性を排除し，また m 匹の蟻の一群の中で最も優れた解を導く蟻が残すフェロモンを比較的大きく設定することにより集中化の促進を行った．

4. 容量制約 p メディアン問題への拡張

容量制約 p メディアン問題に対しても，アントアルゴリズムの適用を行った．容量制約の無い先の問題においては，p 個の施設ノードを決定すれば，各ノードを最もコストの小さい施設ノードへ割当てることで目的関数の値を最小にできた．しかしながら，容量制約 p メディアン問題では，各施設の容量制約のため，全てのノードをそれぞれ最も近い施設ノードへ割当てることができる保証はない．そこで，先のアントアルゴリズムにおいて，p 個の施設ノードの選択を行ってから目的関数値を得るまでの間に次の操作を追加する．

まず，p 個の施設ノードを選択した後，各施設ノードに与えられた制約を考慮して，需要量の大きい順に，全てのノードを施設ノードに割当てていく．ノード u を割当てる施設ノードには，残存する供給量が u の需要量を満たすものの中で d_{uv} が最小となる v を選ぶ．この結果，制約を満たさなかった場合，その蟻に関してはフェロモンの追加は行わないものとする．

制約を満たした場合は，更に良い割当てを探索する．これは需要ノードの割当て順序を変化させる事で行う．具体的には，需要量の降順であった初回の割当順序に対し近傍探索を行い，徐々に割当順序を変化させる．得られた解がより良い解である限り，局所近傍探索を繰り返す．

5. 実験結果と考察

C 言語を用いて提案アルゴリズムを実装し，Pentium Celeron 1.2 GHz，Memory 256 MB の計算機で動作させた．問題例は OR-library [6] から入手し，p メディアン問題，容量制約 p メディアン問題共に 10 個のテストデータを用いて測定を行った．比較するアルゴリズムとして，p メディアン問題に関しては文献 [4] の Evolution Program を，容量制約 p メディアン問題に関しては文献 [1] の Hybrid Simulated Annealing を選択した．実行結果であるが，比較手法と同じ試行回数繰り返し，最良の値について比較を行った．表 1 に p メディアン問題に対する結果を，表 2 に容量制約 p メディアン問題に対する結果を示す．これらの結果より，p メディアン問題に適用したアントアルゴリズムは，他手法と同程度もしくはそれ以上の性能を発揮することがわかった．しかしながら，拡張問題に対しては，比較した手法に比べ，若干精度が下がる．これは，拡張部分において近傍探索を行ったが，この部分で局所最適に陥っていることに起因するものと考えられる．この解決を今後の課題とする．

表 1: p メディアン問題に対する実験結果

No.	Opt	Ant	EP	No.	Opt	Ant	EP
1	5819	5819	5819	6	7824	7824	7824
2	4093	4093	4093	7	5631	5631	5645
3	4250	4250	4250	8	4445	4486	4465
4	3034	3056	3046	9	2734	2773	2762
5	1355	1358	1361	10	1255	1264	1277

表 2: 容量制約 p メディアン問題に対する実験結果

No.	Opt	Ant	HSA	No.	Opt	Ant	HSA
1	713	713	713	6	778	778	778
2	740	740	740	7	787	787	787
3	751	751	751	8	820	823	820
4	651	652	651	9	715	715	715
5	664	664	664	10	829	841	829

参考文献

[1] I. H. Osman and N. Christofides, “Capacitated Clustering Problems by Hybrid Simulated Annealing and Tabu Search,” *International Transactions in Operational Research*, vol.1, no.3, pp317-336, 1994.

[2] M. Dorigo, V. Maniezzo, and A. Coloni, “Ant System: Optimization by a Colony of Cooperating Agents,” *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, vol.26, no.1, pp.29-41, 1996.

[3] O.Kariv and S.L. Hakimi, “An Algotithmic Approach to Network Location Problems. Part2: The p-Medians,” *SIAM Jounal on Applied Mathematics*, vol.37, pp.539-560, 1979.

[4] P. Dominguez-Martin, S. Nickel, P. Hansen and N. Mladenovia, “Heuristic Procedures for Solving the Discrete Ordered Median Problem,” *Berichte des ITWM 46*, 2003.

[5] T. Stutzle and H. Hoods, “*Max-Min* Ant System,” *Future Generation Computer Systems*, vol.16, no.8, pp.889-914, 2000.

[6] http://mscmga.ms.ic.ac.uk/info.html