

A-032

## 多重 Knuth-Bendix 完備化における危険対除去手法の導入 Removing Redundant Critical Pairs in Multi Knuth-Bendix Completion

道又 淳一†  
Junichi Michimata

青戸 等人†  
Takahito Aoto

外山 芳人†  
Yoshihito Toyama

### 1. はじめに

項書換えシステムは等式論理に基づく計算モデルである [3]。項書換えシステムに基づく Knuth-Bendix 完備化 (以下, KB 完備化) は重要な自動定理証明手法として知られる。近年, 多重 KB 完備化 [4], 停止性判定器に基づく KB 完備化 [5], それら両方の特徴を組み入れた停止性判定器に基づく多重 KB 完備化 [6] など, 特定の簡約順序に基づかない KB 完備化が提案されている。

従来の KB 完備化においては冗長な危険対を取り除いて効率化を図る手法が知られている [1]。しかしながら, 多重 KB 完備化における危険対除去手法の導入はまだ試みられていない。

本論文は多重 KB 完備化における危険対除去手法の導入を提案する。まず, 文献 [1] のアイデアに基づき, KB 完備化における危険対除去手法を形式化する。次に, それを多重 KB 完備化へ拡張する。そして, 危険対除去付き多重完備化システムの実装および実験結果を報告する。

### 2. 項書換えシステムと KB 完備化

項書換えシステムは書き換え規則とよばれる項の対の集合である [3]。自然数  $0, 1, 2, \dots$  を  $0, S(0), S(S(0)), \dots$  と表すと, 自然数上の加算は以下の項書換えシステムで表現できる。

$$R = \left\{ \begin{array}{l} x + 0 \quad \rightarrow \quad x \\ x + S(y) \quad \rightarrow \quad S(x + y) \end{array} \right.$$

例えば,  $1 + 1 = 2$  の計算は, 項書換えシステムでは  $S(0) + S(0) \xrightarrow{R} S(S(0) + 0) \xrightarrow{R} S(S(0))$  という書き換えで実現できる。項  $s$  から  $t$  に  $0$  回以上の書き換えで到達できるとき  $s \xrightarrow{*} t$  と記す。 $t_1 \xrightarrow{*} t \xrightarrow{*} t_2$  に対し  $t_1 \xrightarrow{*} s \xrightarrow{*} t_2$  なる項  $s$  が存在するとき, 項書換えシステム  $R$  は合流性を持つという。合流性と停止性を持つ項書換えシステムは完備とよばれる。

KB 完備化は等式論理  $E$  と等価で完備な項書換えシステムを生成する手続きである。等式集合  $E$  と書き換え規則集合  $R$  の組  $\langle E, R \rangle$  に対し, 推論規則を繰り返し適用する。等式集合  $E_0$  と簡約順序  $>$  を入力として受け取り,  $>$  に基づいて等式を書き換え規則に変換すると共に, 書き換え規則の危険対を生成し等式集合に加えていく。 $\langle E_0, \emptyset \rangle$  から  $\langle \emptyset, R \rangle$  の導出に成功すると,  $R$  は  $E_0$  と等価で完備な項書換えシステムとなっている [3]。

### 3. 危険対除去手法による KB 完備化の効率化

文献 [1] で与えられる危険対除去手法は, 文献 [3] のように推論規則の形で形式化されていない。そこで, 識別番号付きの規則を導入することで, 危険対除去付き KB 完備化の形式化を行った。

†東北大学 電気通信研究所

$$\begin{array}{l} \text{Deduce} \\ \frac{E, R}{E \cup \{s \approx t : \{i, j\}\}, R} \quad \langle s, t \rangle \in CP_{i,j} \\ \\ \text{Orient} \\ \frac{E \cup \{s \approx t : I\}, R}{E, R \cup \{s \rightarrow t : k\}} \quad \begin{array}{l} s > t \\ k : \text{fresh} \end{array} \\ \\ \text{Delete} \\ \frac{E \cup \{s \approx s : I\}, R}{E, R} \\ \\ \text{E-Simp} \\ \frac{E \cup \{s \approx t : I\}, R}{E \cup \{u \approx t : I\}, R} \quad s \xrightarrow{R} u \\ \\ \text{R-Simp} \\ \frac{E, R \cup \{s \rightarrow t : i\}}{E, R \cup \{s \rightarrow u : i\}} \quad t \xrightarrow{R} u \\ \\ \text{L-Simp} \\ \frac{E, R \cup \{s \rightarrow t : i\}}{E_{cp} \cup \{u \approx t : \{i, j\}\}, R} \quad \begin{array}{l} s \xrightarrow{\exists} u \\ l \xrightarrow{R} j \end{array} \\ \\ E_{cp} = \{v \approx w : I \in E \mid i \notin I\} \end{array}$$

図 1: 危険対除去付き KB 完備化の推論規則

推論規則を図 1 に示す。 $CP_{i,j}$  は 2 つの書き換え規則  $l \rightarrow r : i, v \rightarrow w : j \in R$  による危険対の集合を表す。 $s \xrightarrow{\exists} u$  は,  $s \xrightarrow{l \rightarrow r : i} u$  であり,  $l$  は  $s \rightarrow t$  で書換えられないことを示す。

KB 完備化 [3] との違いは以下である。

1. 書き換え規則に識別番号, 等式には識別番号の集合が付与される。
2. Orient 規則にて書き換え規則へ新しい識別番号を付与し, Deduce 規則, L-Simp 規則にて, 生成元となる書き換え規則の識別番号を等式へ付与する。
3. L-Simp 規則にて識別番号に基づいて, 取り除かれる書き換え規則が生成元である等式を除去する (危険対除去)。

### 4. 多重 KB 完備化

KB 完備化は用いる簡約順序により成否が左右されるため, 複数の簡約順序について完備化を行うことが期待される。多重 KB 完備化 [4, 6] は複数の KB 完備化プロセスを同時並行的に実行する。プロセスはビット列で表現され, プロセスの集合  $P$  の初期状態は  $\{\epsilon\}$  として与えられる。Orient 規則による等式から書き換え規則への変換が  $s \approx t$  から  $s \rightarrow t, t \rightarrow s$  への 2 通りに可能な場合, プロセス  $p$  を  $p_0, p_1$  に分岐する。複数のプロセスを同時に扱うためにノードと呼ばれるデータ構造を導入する。ノードは以下の組で定義される。

$$\langle s : t, R_1, R_2, E, C_1, C_2 \rangle$$

ここで,  $s, t$  は項,  $R_1, R_2, E, C_1, C_2 \subseteq P$  である。 $R_1, R_2, E$  はそれぞれ  $s \rightarrow t, t \rightarrow s, s \approx t$  を含むプロセスの集合,  $C_1, C_2$  はそれぞれ  $s \rightarrow t, t \rightarrow s$  を停止性判定のための制約書き換え規則として含むプロセスの集合である。

$$\text{Rewrite2} \frac{N \cup \{s : t, id_{s \rightarrow t}, id_{t \rightarrow s}, R_1, R_2, E', C_1, C_2\}}{N \cup \{s : t, id_{s \rightarrow t}, id_{t \rightarrow s}, R_1 \setminus R, R_2 \setminus R, E'_{s:t}, C_1, C_2\} \cup \{s : u, id_{s \rightarrow u}, id_{u \rightarrow s}, R_1 \cap R, \emptyset, E'_{cp}, \emptyset, \emptyset\}}$$

$$(l : r, id_{l \rightarrow r}, id_{r \rightarrow l}, R, \dots) \in N, t \xrightarrow{l \rightarrow r} u, E'_{s:t} = \{(p, id_1, id_2) \in E' \mid p \notin R\},$$

$$E'_{cp} = \{(p, id_{t \rightarrow s}, id_{l \rightarrow r}) \mid p \in R_2 \cap R\} \cup \{(p, id_1, id_2) \in E' \mid p \in R \wedge id_{t \rightarrow s} \notin \{id_1, id_2\}\}$$

図 2. 危険対除去付き多重 KB 完備化の推論規則 ( 抜粋 )

Orient 戦略 (a)							
危険対除去	なし			あり			
問題	AS	P	T	AS	P	T	DCP
3.01 <sup>[2]</sup>	98	19	12684	103	20	14368	75
3.03 <sup>[2]</sup>	44	6	4364	46	7	6280	14
Acker <sup>[5]</sup>	4	6	104	4	6	108	0
Endo <sup>[5]</sup>	38	7	3576	39	18	5996	36

  

Orient 戦略 (b)							
危険対除去	なし			あり			
問題	AS	P	T	AS	P	T	DCP
3.01 <sup>[2]</sup>	65	17	3088	64	15	3264	48
3.03 <sup>[2]</sup>	27	6	1120	27	6	1240	11
Acker <sup>[5]</sup>	3	5	56	3	5	56	0
Endo <sup>[5]</sup>	35	7	1616	35	7	1808	30

表 1. 危険対除去手法の有無による完備化効率の比較

多重 KB 完備化はノードの集合  $N$  に対して推論規則を適用していく。入力 of 等式集合  $E_0$  に対し、ノード集合の初期状態は  $N = \{s : t, \emptyset, \emptyset, \{\epsilon\}, \emptyset, \emptyset \mid s \approx t \in E_0\}$  とする。

### 5. 多重 KB 完備化への危険対除去手法の導入

3 節で導入した識別番号付きの規則を多重 KB 完備化へ拡張することによって、危険対除去付き多重 KB 完備化システムを実現した。ノードを以下のようなデータ構造に拡張した。

$$\langle s : t, id_{s \rightarrow t}, id_{t \rightarrow s}, R_1, R_2, E', C_1, C_2 \rangle$$

ここで、 $s, t$  は項、 $id_{s \rightarrow t}, id_{t \rightarrow s} \in \mathbb{N}$  はそれぞれ書き換え規則  $s \rightarrow t, t \rightarrow s$  の識別番号、 $R_1, R_2, C_1, C_2 \subseteq P, E' \subseteq (P, \mathbb{N}, \mathbb{N})$  である。  $E'$  の要素  $(p, id_{g \rightarrow d}, id_{v \rightarrow w})$  は、プロセス  $p$  に含まれる等式  $s \approx t$  が書き換え規則  $g \rightarrow d, v \rightarrow w$  より生成された危険対であることを示す。

図 2 に危険対除去付き多重 KB 完備化の推論規則の一部を示す。Rewrite2 規則は KB 完備化の推論規則 E-Simp, R-Simp, L-Simp を同時に行う。  $E'_{cp}$  が危険対除去を行った結果を表す。取り除かれる書き換え規則  $t \rightarrow s$  の識別番号  $id_{t \rightarrow s}$  を用いてその書き換え規則から生成された危険対を含まないようにしている。

### 6. 実装と実験

危険対除去付き多重 KB 完備化を関数型言語 SML/NJ で実装した。コードは 1600 行程である。

文献 [2, 5] の例題を対象として実験を行った。Orient 規則におけるノード選択には以下の 2 つの戦略を用いた。(a) 多重完備化システム MKBtt が用いる戦略 [6]。(b) プロセス選択に項サイズを考慮する戦略。

表 1 に実行結果の抜粋を示す。AS は完備化成功までのステップ数、P はプロセスの数、T は実行時間 (ミリ秒)、DCP は除去された危険対の数を表す。

戦略 (a) では、危険対除去により完備化成功までのステップ数、プロセスの数が同じか増加している一方、戦略 (b) では、同じか減少している。つまり、Orient 戦略により危険対除去手法の効果が異なった。危険対除去のためのオーバーヘッドにより、実行時間は増加してしまった。危険対は除去されても AS, P が変化しない例がある。これは、除去せずとも簡約化されて取り除かれる危険対、規則として選択されない危険対が除去されたと考えられる。

### 7. まとめ

危険対除去手法を組み込んだ KB 完備化の推論規則を示した。そして、これを拡張して危険対除去手法を組み込んだ多重 KB 完備化システムを実現した。さらに、実験を行い危険対除去手法の効果について考察した。今後は Orient 規則における戦略と危険対除去手法の効果の関係について考察する必要がある。

### 参考文献

- [1] K. Sakai, Knuth-Bendix の完備化手続きとその応用, コンピュータソフトウェア, Vol. 4, No. 1, pp. 2-22, 1987.
- [2] J. Steinbach and U. Kühler, Check your ordering - termination proofs and open problems SEKI-Report SR-90-25, University of Kaiserslautern, 1990.
- [3] F. Baader and T. Nipkow, *Term Rewriting and All That*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [4] M. Kurihara and H. Kondo, Completion for multiple orderings, *J. Autom. Reasoning*, Vol. 23, pp. 25-42, 1999.
- [5] I. Wehrman, A. Stump and E.M. Westbrook, Slothrop: Knuth-Bendix completion with a modern termination checker, In *Proc. RTA 2006*, LNCS 4098, pp. 287-296, Springer-Verlag, 2006.
- [6] H. Sato, M. Kurihara, S. Winkler and A. Midderdorp, Constraint-based multi-completion procedures for term rewriting systems, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, Vol. E92-D, No. 2, pp. 220-234, 2009.