A-028

ある種の不完全情報渋滞ゲームの近似的ナッシュ遷移の収束性

Convergence of Approximately Nash Transition in Some Incomplete Congestion Games

山田 陽介 † 小野 廣隆 ‡ 来嶋 秀治 ‡ 山下 雅史 ‡
Yosuke Yamada Hirotaka Ono Shuji Kijima Masafumi Yamashita

1. はじめに

Chien と Sinclair は, 非協力対称渋滞ゲームにおける分散的なローカルダイナミクスによって, プレイヤー数 n, プレイヤーの遷移への動機を制限する係数 α, 辺の遅延関数の増加を制限する係数 ϵ の多項式回数以下の遷移ステップ数で近似的ナッシュ均衡状態を実現できることを示した [1]. 本論文では, 分散的なコスト計算の際に個々のプレイヤーが他のプレイヤーの戦略について不完全な情報しか持たないある種のゲームを想定し, プレイヤーごとに異なり得る仮想的な大域状態の予測方法を規定することにより, 不完全情報渋滞ゲームにおけるダイナミクス収束のために必要な条件を考察する.

2. 渋滞ゲーム

2.1. 渋滞モデルと渋滞ゲームの定義

本稿で取り扱う渋滞モデルと, ゲームを定義する.

定義 2.1. 渋滞モデル A:
・プレイヤーの有限集合 $P = \{1, \dots, n\}$
・P によって共有される資源の集合 $E = \{e_a, e_b\}$
・プレイヤー間で共通の戦略集合
$S_i = \{s_a, s_b : s_a = \{e_a\}, s_b = \{e_b\}\}$
・各資源の利用コスト $d(t)$, ただし t はその資源を利用するプレイヤーの数であり, d は非負かつ非減少の関数.

ここで, 各プレイヤー i が取る戦略 s_i の組 $s = (s_1, \dots, s_n)$ を状態と呼ぶことにする.

定義 2.2. ゲーム A:
渋滞モデル A において, プレイヤー i が負うコストが
$c_i(s) = \sum_{e \in s_i} d(f_s(e)) = d(f_s(e))$ であるゲーム.
ただし $f_s(e)$ は状態 s において資源 e を利用するプレイヤーの数.

一般の渋滞モデルでは戦略集合 $S_i \subset 2^E$ はプレイヤー毎に異なり得るが, 渋滞モデル A ではプレイヤーの戦略集合 S_i を共通のものとしたため, ゲーム A は対称である.

2.2. ナッシュ均衡とナッシュダイナミクス

状態を $s = (s_1, s_2, \cdots, s_n)$ とし, 状態の集合を $S = \Pi_{i=1}^n S_i$ と表す. s におけるプレイヤー i の戦略 s_i を $r \in S_i$ に置き換えて作られる状態を $s(i, r)$ と表す. 任意のプレイヤー i と戦略 $r \in S_i$ に対して $c_i(s) \le c_i(s(i, r))$ が成立するとき, 状態 s は純粋ナッシュ均衡であるという. s が純粋ナッシュ均衡であるならば, 各プレイヤーは（その他のプレイヤーが戦略を変更しない限り）戦略を変更することでコストを減少させることはできないという意味で均衡している. 渋滞ゲームには純粋ナッシュ均衡が存在することが知られている.

任意の状態 s を考える. あるプレイヤー i がコスト c_i を減少させるために戦略 s_i を r に変更することで生ずる状態遷移 $\rightarrow \in S^2$ を考える. すなわち, $s \rightarrow s'$ であるのは, ある $i \in P$ と $r \in S_i$ が存在して, $s' = s(i, r)$ かつ $c_i(s) > c_i(s')$ が成立するとき, かつそのときに限る. $\rightarrow$ をナッシュ遷移, 状態の遷移 $s^0 \rightarrow s^1 \rightarrow \cdots$ をナッシュダイナミクスと呼ぶ. 任意のナッシュダイナミクスはある純粋ナッシュ均衡 s^k に到達することが知られているが, 一方, 純粋ナッシュ均衡を求める問題は, 渋滞ゲームが対称の場合でも PLS-完全であることが知られている.

2.3. ϵ-ナッシュ均衡と ϵ-ナッシュダイナミクス

純粋ナッシュ均衡を求める問題の困難さを緩和するために以下の近似ナッシュ均衡を考える. ある定数を $\epsilon > 0$ とする. 任意のプレイヤー i と戦略 $r \in S_i$ に対して $(1-\epsilon)c_i(s) \le c_i(s(i, r))$ が成立するとき, 状態 s は ϵ-ナッシュ均衡であるという.

状態 $s \in S$, プレイヤー $i \in P$, 戦略 $r \in S_i$ に対して $s' = s(i, r)$ であるとき, 改善比を $\rho_s(i, r) = \frac{c_i(s) - c_i(s')}{c_i(s)}$ と定義する. あるプレイヤー i が戦略 s_i を r に変更することで改善比 $\rho_s(i, r) > \epsilon$ を達成できるときのみ状態遷移を許すナッシュダイナミクスを ϵ-ナッシュダイナミクスと呼ぶ. すなわち, $s \rightarrow_\epsilon s'$ であるのは, ある $i \in P$ と $r \in S_i$ が存在して, $s' = s(i, r)$ かつ $\rho_s(i, r) > \epsilon$ が成立するとき, かつそのときに限る.

資源の利用コスト関数について, ある定数 $\alpha \ge 1$ が存在し, すべての $t \ge 1$ に対して $d(t+1) \le \alpha d(t)$ が満たされるとする. このとき, 渋滞ゲームが対称的であるならば, 任意の ϵ-ナッシュダイナミクスは有限であり, ϵ-ナッシュ均衡に到達するばかりでなく, ϵ-ナッシュ均衡に到達するまでの遷移回数は $\lceil n\alpha\epsilon^{-1} \log(nC) \rceil$ で上から抑えられることが知られている [1]. ここで, C はプレイヤーのコストの上限である.

3. 不完全情報渋滞ゲームと近似ナッシュダイナミクス

3.1. 不完全情報渋滞ゲーム

あるプレイヤー j が別のあるプレイヤー i の戦略を知ることができないような状況を考える. プレイヤー i の戦略をプレイヤー j が知ることができるとき, 有向辺 (i, j) を定義することによって構成される有向グラフ $G = (P, A)$ を可視グラフと呼ぶ. プレイヤー j が戦略を知ることができるプレイヤーの集合を $N^-[j] = \{i : (i, j) \in A\} \cup \{j\}$ とする. 通常の渋滞ゲームでは $N^-[j] = P$ が任意の $j \in P$ に対して成立していた. 不完全情報渋滞ゲームでは, プレイヤー j にとって, s_i は $i \in N^-[j]$ であるときに限り既知である. そこで, $i \notin N^-[j]$ であるようなすべてのプレイヤー i について s_i を $*$ に置き換えて s からできるベクトルを $v_j(s)$ と書く. ここで, $*$ は対応する状態が未知であることを示す記号である. 任意の $i \in P$ に対して $S_i^* = S_i \cup \{*\}$, $S^* = \Pi_{i=1}^n S_i^*$ とする. 関数 $\phi_i : S^* \to S$ を (プレイヤー i の) 仮説関数と呼ぶ. 仮説関数は s^* の $*$ である要素のそれぞれに対してある戦略を代入したベクトルを返す関数であり, $v_i(s)$ を元に何らかの仮説, すなわち $*$ を含まないある状態 $s' \in S$ を想定するために用いる. 具体的には, $s^* \in S^*$ を仮説関数 ϕ に与えたとき, $s_i = s_j = \cdots = s_m = *$ であるプレイヤー $i, j, \cdots, m$ の戦略が $s'_i, s'_j, \cdots, s'_m \in S_i$ に置き換えられた状態 $\phi(s^*)$ を得たとする. このとき, $\phi(s^*)$ を ϕ による仮説と定義し, $\phi(s^*) = s^*(i, s'_i; j, s'_j; \cdots; m, s'_m)$ と表記する. また, $*$ を含む状態 s^* から任意の仮説関数によって作られ得る仮説の集合を $\Delta(s^*)$ と定義する.

3.2. 不完全情報渋滞ゲームの近似ナッシュダイナミクス

可視グラフ G に加えて, 各プレイヤー i に対する仮説関数 $\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$ も与えられているとする. このとき, プレイヤー i の s に関する既知の情報 $v_i(s)$ から仮説関数 ϕ_i を用いて復元した状態 $t = \phi_i(v_i(s))$ が正しいと仮定したときに, プレイヤー i の戦略を r に変更したときの改善比は $\rho_t(i, r)$ である.

ある定数を $\epsilon > 0$ とする. あるプレイヤー i が戦略 s_i を r

†九州大学大学院システム情報科学府
‡九州大学大学院システム情報科学研究院

に変更することで改善比 $\rho_t(i,r) > \epsilon$ を達成できるときのみ状態遷移を許す ϵ-ナッシュダイナミクスを不完全情報下での ϵ-ナッシュダイナミクスと呼ぶ.

以降の議論を具体的にするために, 特に断りがない限り, 遷移は $\mathrm{argmax}_i \max_{r\in S_i} \rho_t(i,r)$ を満たすプレイヤーが $\mathrm{argmax}_{r\in S_i}\rho_t(i,r)$ を満たす戦略に遷移することによってなされるものとする.

我々の最終的な目的は, 一般的なゲームにおいて ϵ-ナッシュダイナミクスが有限, すなわち ϵ-ナッシュ均衡に到達するためにゲームが満たすべき必要条件と十分条件を検討することであるが, 本稿ではある単純化したゲームにおける ϵ-ナッシュダイナミクスが収束しない場合について考察する.

4. 楽観的仮説関数と悲観的仮説関数

楽観的仮説関数によって想定された状態とは, プレイヤーによって実現され得る最小の改善比が, 最大となる状態であるとする. 具体的には, 状態 s^* におけるプレイヤー i に対する楽観的な状態を次式で定義する.

$\phi_{o,i}(s^*) = \mathrm{argmax}_{t\in\Delta(s^*)} \min_{r\in S_i} \rho_t(i,r)$

悲観的仮説関数によって想定された状態とは, プレイヤーによって実現され得る最大の改善比が, 最小となる状態であるとする. 具体的には, 状態 s^* におけるプレイヤー i に対する悲観的な状態を次式で定義する.

$\phi_{p,i}(s^*) = \mathrm{argmin}_{t\in\Delta(s^*)} \max_{r\in S_i} \rho_t(i,r)$

5. ゲーム A の改善比と収束性

5.1. ゲーム A 中のプレイヤーの改善比

ゲーム A では, ある状態 s における i のコストは次式で計算できる.

$c_i(s) = d(r)$

ただし, $r = f_s(e)$ とする. このとき, プレイヤー i が戦略を s_i' に変更し, 状態が s' となった後のプレイヤー i のコストは, $c_i(s') = d(n+1-r)$ となる. したがって, ある状態 s におけるプレイヤー i の改善比は, r および遅延関数 d を用いて次のように計算できる.

$\rho_s(i,r) = \frac{c_i(s)-c_i(s')}{c_i(s)} = \frac{d(r)-d(n+1-r)}{d(r)} = \kappa(r)$

辺の遅延関数 d は非減少関数であるので, κ も非減少関数である. また, $r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$ のとき, $\kappa(r) \le 0$ となる.

5.2. ϵ-ナッシュダイナミクスが収束しない例

可視グラフにおいて, 各頂点の入次数は各プレイヤーが戦略を知ることができるプレイヤー数を表し, その補グラフの入次数は各プレイヤーが戦略を知ることができないプレイヤー数を表している. ここでは, 後者が $k \ge 1$ のゲーム A において, 楽観的仮説関数を持つプレイヤー数が一定以上存在し, かつ近似係数がより小さく純粋ナッシュ均衡により近い状態を均衡状態と定義したときに, 収束しないゲームが存在することを示す. また, 悲観的仮説関数を持つプレイヤー数が一定以上存在するとき, ϵ-ナッシュ均衡でない状態でダイナミクスが停止する場合の存在を示す.

定理 5.1. $\epsilon < \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ とする. 楽観的仮説関数を持つプレイヤー数を n_0 とする.

$$n_0 \ge \begin{cases} 2k+1(\neq 2k+3) : n \text{ が奇数のとき} \\ 2k+2(\neq 2k+4) : n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

ならば, ϵ-ナッシュ遷移が収束しない可視グラフと初期状態が存在する.

証明. 同じ戦略を取るプレイヤーの集合のうち, 大きさが $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 以上のものを P_l とする. 仮定が成立しているとき, 楽観的仮説関数を用いて想定した改善比が $\kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ 以上となるプレイヤーが P_l 中に少なくとも一人存在しているという状況が, 遷移の前後で継続する可視グラフと初期状態を与えることができるということを示す. まず, 楽観的なプレイヤーの集合を P_c と呼び, その大きさを n_0 とする.

つぎに, 可視グラフ G の構成方法を述べる.

1. プレイヤーの集合 P をグラフ G の頂点集合とする.
2. P_c に属するプレイヤー間で, 長さ n_0 のサイクルが構成されるように辺を追加する. この $i \in P_c$ とサイクルで構成される, グラフ G の部分グラフを G_c とする.
3. P_c に属する任意のプレイヤー i が, G_c における $N^-[i], N^{-2}[i], \ldots, N^{-k}[i]$ からの入次辺を持つように辺を追加する.
4. $P \setminus P_c$ に属するすべてのプレイヤーに, 自身と同じ戦略を取っていて $P \setminus P_c$ に属していて自身とは異なるプレイヤーからの辺を一つと, $k-1$ 個の任意の頂点からの入次辺を追加する.

さらに, 初期状態は次のように与える.

1. P_c の初期状態として, G_c 上で連続する $\lceil \frac{n_0}{2} \rceil$ 人のプレイヤーは P_a に属し, $\lfloor \frac{n_0}{2} \rfloor$ 人のプレイヤーが P_b に属するとする.
2. $P \setminus P_c$ の初期状態として, $n - n_0$ 人のうち $\lceil \frac{n-n_0}{2} \rceil$ 人が P_a に属し, $\lfloor \frac{n-n_0}{2} \rfloor$ 人が P_b に属するとする.

n が奇数のとき, 与えた可視グラフと初期状態において, P_l に属しており, かつ見えないプレイヤーが全て自身とは異なる戦略を取っているプレイヤーが 1 人だけ存在する. このプレイヤーを p^* と呼ぶことにする. グラフの性質により, p^* の改善比は $\kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ であり, 他のプレイヤーの改善比は全てこれより小さい. このため, p^* による遷移が生じる. また, この遷移が生じた後も, 同様の議論が成立し, 遷移が生じるため, 遷移は収束しない.

n が偶数のとき, 与えた可視グラフと初期状態において, P_l に属しており, かつ見えないプレイヤーが全て自身とは異なる戦略を取っているプレイヤーが 2 人存在する. これらのプレイヤーを p^* と呼ぶことにする. グラフの性質により, p^* の改善比は $\kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ であり, 他のプレイヤーの改善比は全てこれより小さい. このため, p^* による遷移が生じる. この遷移が生じた後に, P_l に属しており, かつ見えないプレイヤーが全て自身とは異なる戦略を取っているプレイヤーが 1 人だけ存在する. このプレイヤーを p^{**} と呼ぶことにする. グラフの性質により, p^{**} の改善比は $\kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k + 1)$ であり, 他のプレイヤーの改善比は全てこれより小さい. このため, p^{**} による遷移が生じる. この遷移により, 初期状態と同様の状態となり, 同様の議論が成立するため, 遷移は収束しない. □

定理 5.2. $\epsilon \le \kappa(n)$ とする. 悲観的仮説関数を持つプレイヤー数を n_p とする. $n_p \ge \min\{i \in \mathbb{N} : \epsilon < \kappa(i)\}$ ならば, ϵ-ナッシュ遷移が ϵ-ナッシュ均衡ではないにもかかわらず停止する可視グラフと初期状態が存在する.

証明. 戦略 s_a を取るプレイヤーの集合を P_a とし, その大きさを n_p とする. $\epsilon < \kappa(n_p)$ であるから, このとき ϵ-ナッシュ均衡は成立していない.

ここで, P_a 中のプレイヤーは全て悲観的仮説関数を持つとする. さらに, 可視グラフ G の補グラフにおいて, P_a 中のプレイヤーは, P_a に属するプレイヤーからの入次辺を少なくとも 1 つ持つものとする. すると, $i \in P_a$ は, 自身の改善比を $\epsilon \ge \kappa(n_p - 1)$ 以下であると想定するため, 遷移は生じず, ϵ-ナッシュ均衡は実現しない. □

6. まとめ

本稿では, ある単純なゲームにおいて, 個々のプレイヤーが対称渋滞ゲームの状態について不完全な情報しか持たない場合に, ゲームが収束しないための十分条件を明らかにした. 今後の課題は, ゲーム A が収束するための十分条件や, より多数の資源が利用できる状況や, より一般的な可視グラフが存在する状況におけるナッシュダイナミクスの収束性を明らかにすることである.

参考文献

[1] S. Chien and A. Sinclair: “Convergence to approximate Nash equilibria in congestion games,” *Proceedings of the 18th annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms(SODA 2007)*, pp. 169–178.