A-026

グラフ分割を用いた格子描画法
Grid Drawings of Planar Graphs using Bipartition

引野 高嗣*　　周 暁†　　西関 隆夫‡
Takashi Hikino　　Xiao Zhou　　Takao Nishizeki

東北大学大学院情報科学研究科
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05

1. はじめに

平面グラフ G の**格子描画**では，G の各点は 2 次元整数格子上に配置され，各辺は直線分として描かれ，どの 2 辺も共通の端点以外では交差しない．格子描画の**幅** W と**高さ** H は，それぞれ描画全体を囲む最小な軸平行長方形の幅と高さである．平面グラフ G の格子描画を求める線形時間アルゴリズムとして，シフト法 [1] などいろいろなアルゴリズムが知られている．G の点数を n とすると，シフト法による描画では $W = n-1, H = n-2$ であり，外面を描画する三角形には水平辺と傾き $-45°$ の辺がある．

本文では, 大きさがバランスするように平面グラフ G を 2 つの部分グラフに分離する分離点対があるならば, G は小さな格子描画を持つことを示す．ただし，得られる描画の平面埋込みは，平面グラフ G の与えられた埋込みと異なるかもしれない．特にどんな直並列グラフも $W \leq \lfloor 2n/3 \rfloor + 1, H \leq \lfloor 2n/3 \rfloor - 1$ なる格子描画を持ち，その描画は線形時間で求まることを示す．なお求まる描画の外面は平行四辺形である．

2. 平面グラフ

本文でグラフ G には多重辺がないとする．G の点集合を $V(G)$，辺集合を $E(G)$ と書き，$|V(G)|$ を $n(G)$ と書く．グラフ G が次の条件を満たすように部分グラフ G_1 と G_2 に分離できるとき，点対 $\{s,t\}$ は G の**分離点対**であるという (図 1(a) 参照)．

・$V(G) = V(G_1) \cup V(G_2), V(G_1) \cap V(G_2) = \{s,t\}$,
・$E(G) = E(G_1) \cup E(G_2), E(G_1) \cap E(G_2) = \emptyset$.

例えば，G の任意の辺の両端点は分離点対である．

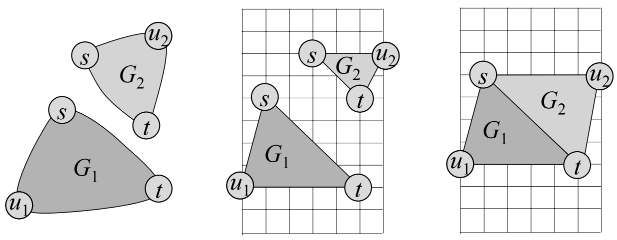
G_1 と G_2 の点数がほぼ等しいならば，G は小さい格子描画を持つことが，次のようにわかる．

定理 1．平面グラフ G の任意の分離点対を $\{s,t\}$ とし，$\{s,t\}$ により G が G_1 と G_2 に分離するとする．このとき G は $W \leq \max\{n(G_1), n(G_2)\}, H \leq \max\{n(G_1), n(G_2)\} - 2$ なる格子描画を持ち，それは線形時間で求まる．

証明．一般性を失うことなく，$n(G_1) \geq n(G_2)$ と仮定する．

まず，$n(G_2) = 2$ の場合を考える．このとき，$n(G) = n(G_1)$ であり，$G = G_1$ としてよい．G に対してシフト法 [1] を用いて得られる格子描画の幅は $W = n(G) - 1 < \max\{n(G_1), n(G_2)\}$ であり，高さは $H = n(G) - 2 = \max\{n(G_1), n(G_2)\} - 2$ であり，定理は成り立つ．

次に，$n(G_2) \geq 3$ の場合を考える．G_i, $i = 1, 2$, に辺 (s,t) がないとき，ダミー辺 (s,t) を G_i に追加する．必要ならば更にダミー辺を G_i に追加して，極大平面グラフにする．このようにして得られたグラフを新たに G_i とする．この G_i を辺 (s,t) が外面にあるように平面に埋込む．この平面グラフ G_i の外面上にある 3 点の内の s,t 以外の点を u_i とする (図 1(a) 参照)．G_1 および G_2 をシフト法 [1] を用いて描画する．ただし，図 1(b) に示したように，辺 (u_1,t) は水平であり，辺 (s,t) の傾きは $-45°$ であるようにする．また，辺 (s,u_2) は水平であり，辺 (s,t) の傾きは $-45°$ であるようにする．次に，必要ならば G_2 の格子描画に [1] の横シフトを適用して，G_2 の幅を大きくして，G_1 の幅と同じにする．さらに，G_2 の辺 (s,t) の傾きが $-45°$ となるように，G_2 の点 t のみを垂直方向に移動する．このようにして，G_1, G_2 の描画において辺 (s,t) を同じ長さの傾き $-45°$ の直線分で描く．これら 2 つの描画を結合し，ダミー辺を消して，G の描画を求める (図 1(c) 参照)．G は多重辺を持たないので，G_1 あるいは G_2 の辺 (s,t) はダミー辺であり，G_1 と G_2 の描画を結合しても，ダミー辺は消されるので，辺の重なりは起こらない．また，[1] の描画法では，G_1 の描画において点 s と点 u_1 の x 座標の差がちょうど 1 であり，G_2 の描画においても点 t と点 u_2 の x 座標の差は 1 である．以上より，得られた G の格子描画の幅は明らかに $W = n(G_1) - 1 + 1 = n(G_1) = \max\{n(G_1), n(G_2)\}$ であり，高さは $H = n(G_1) - 2 = \max\{n(G_1), n(G_2)\} - 2$ である．また，G_1, G_2 の描画が線形時間で得られるので [1]，G の描画も線形時間で得られる．□



(a)　　(b)　　(c)

図 1: (a) 部分グラフ G_1, G_2,（b)G_1, G_2 の格子描画,（c)G の格子描画.

3. 直並列グラフ

縮小部分グラフ (マイナ) として 4 点からなる完全グラフ K_4 を含まないグラフは**直並列グラフ**と呼ばれる．また直並列グラフは，1 本の辺から直列接続および並列接続を繰り返して得られる．

次の補題が成り立つ．

補題 1．任意の直並列グラフ G には，G を $n(G_1), n(G_2) \leq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 1$ なる G_1 と G_2 に分離する分離点対があり，それは線形時間で求まる．

証明．$n(G_1), n(G_2) \leq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 1$ なるように分離する分離点対がない直並列グラフ G が存在すると仮定し，矛盾を導く．G はそのような直並列グラフで点数 $n(G)$ が最小であるとする．一般性を失うことなく，G は極大直並列グラフ

*hikino@nishizeki.ecei.tohoku.ac.jp
†zhou@ecei.tohoku.ac.jp
‡nishi@ecei.tohoku.ac.jp

であると仮定してよい．

もし $n(G) \leq 3$ ならば，$n(G) \leq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 1$ であり，G の任意の辺の両端点からなる分離点対は所望の分離点対である．よって，$n(G) \geq 4$ である．

G の分離点対のなかで $\max\{n(G_1), n(G_2)\}$ が最小となる分離点対を $\{s,t\}$ とする (図 2 参照)．G は極大直並列グラフであるので，辺 (s,t) がある．辺 (s,t) は G_2 に含まれるとしてよい．明らかに G_1, G_2 は直並列グラフであり，G は G_1 と G_2 を並列接続して得られる．一般性を失うことなく $n(G_1) \geq n(G_2)$ であるとしてよい．G は所望の分離点対を持たなく，$n(G_1) \geq n(G_2)$ であるので

$$n(G_1) \quad \geq \quad \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 2 \tag{1}$$

である．したがって

$$\begin{aligned} n(G_2) &= n(G) - n(G_1) + 2 \\ &\leq n(G) - \lfloor 2n(G)/3 \rfloor \\ &= \lceil n(G)/3 \rceil \end{aligned} \tag{2}$$

である．式 (1) の右辺に $n(G) \geq 4$ を代入すると，$n(G_1) \geq 4$ を得る．したがって，直並列グラフ G_1 は 2 つのグラフを直列接続あるいは並列接続して得られる．

G_1 は 2 つのグラフを直列接続して得られることを示そう．もし G_1 が図 2(a) に示したように $i (\geq 2)$ 個のグラフ $G_{11}, G_{12}, ..., G_{1i}$ を並列接続して得られると仮定すると矛盾することを示す．$n(G_{1i})$ は $n(G_{11}), n(G_{12}), ..., n(G_{1i})$ のなかで最小であるとして一般性を失わない．$i \geq 2$ であるので，

$$n(G_1) - 2 = \sum_{j=1}^{i} (n(G_{1j}) - 2) \geq 2(n(G_{1i}) - 2)$$

である．したがって

$$n(G_1) \geq 2n(G_{1i}) - 2 \tag{3}$$

である．分離点対 $\{s,t\}$ に関し，G_{1i} を G_1 ではなく G_2 に含まれるように分離し直すことにより新たに得られる部分グラフを G'_1, G'_2 とする．$\{s,t\}$ は $\max\{n(G_1), n(G_2)\}$ が最小である分離点対であるので，

$$\max\{n(G'_1), n(G'_2)\} \geq \max\{n(G_1), n(G_2)\} = n(G_1) \tag{4}$$

である．G には多重辺がなく，辺 (s,t) は G_2 に含まれるので，G_{1i} が 1 本の辺 (s,t) だけからなることはない．よって $n(G_{1i}) \geq 3$ である．したがって

$$n(G'_1) = n(G_1) - n(G_{1i}) + 2 \leq n(G_1) - 3 + 2 < n(G_1)$$

である．この式と式 (4) より，$n(G_1) \leq n(G'_2) = n(G_2) + n(G_{1i}) - 2$ であることがわかる．この式と式 (3) から容易に

$$n(G_1) \leq 2n(G_2) - 2 \tag{5}$$

であることがわかる．また，式 (1) から

$$\begin{aligned} n(G_1) &\geq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 2 \\ &\geq (2n(G) - 2)/3 + 2 \\ &= (2n(G) + 4)/3 \\ &\geq 2\lceil n(G)/3 \rceil \end{aligned}$$

を得る．この式に式 (2) を代入すると $n(G_1) \geq 2n(G_2)$ を得る．しかし，これは式 (5) と矛盾する．

以上から図 2(b) に示すように G_1 は 2 つの直並列グラフ G_{s1} と G_{t1} を直列接続して得られることがわかった．一般性を失うことなく，$n(G_{s1}) \geq n(G_{t1})$ としてよい．また G_{s1} と G_{t1} に共通な端子を u とする．このとき，分離点対 $\{s,u\}$ は G を G_{s1} とその残り $\overline{G_{s1}}$ に分離する (図 2(b) 参照)．$\{s,t\}$ は $\max\{n(G_1), n(G_2)\}$ が最小である分離点対であるので，

$$\begin{aligned} \max\{n(G_{s1}), n(\overline{G_{s1}})\} &\geq \max\{n(G_1), n(G_2)\} \\ &= n(G_1) \end{aligned} \tag{6}$$

である．$n(G_{s1}) < n(G_1)$ であるので，式 (6) より $n(\overline{G_{s1}}) \geq n(G_1)$ であることがわかる．この式と式 (1) より，

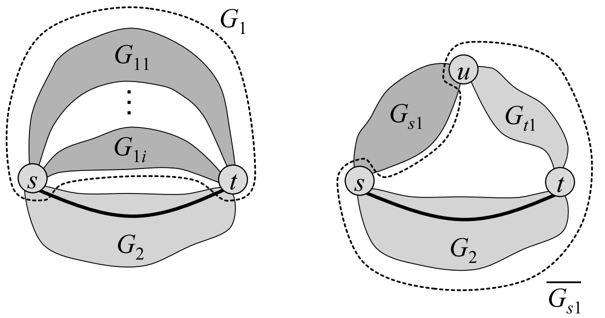
$$n(\overline{G_{s1}}) \geq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 2 \tag{7}$$

である．また，$n(G_{s1}) \geq n(G_{t1})$ であるので，$n(G_1) = n(G_{s1}) + n(G_{t1}) - 1 \leq 2n(G_{s1}) - 1$ であり，$n(G_{s1}) \geq n(G_1)/2 + 1/2$ である．この式に式 (1) を代入すると $n(G_{s1}) \geq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor/2 + 3/2$ である．この式と式 (7) を $n(G) = n(G_{s1}) + n(\overline{G_{s1}}) - 2$ に代入すると，

$$n(G) \geq (3/2)\lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 3/2 \geq n(G) + 1/2$$

であり，矛盾である．

以上より，$n(G_1), n(G_2) \leq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 1$ なる分離点対 $\{s,t\}$ が必ず存在することが証明できた．なお，直並列グラフの分解木を利用すれば，所望の分離点対を線形時間で見つけることができる．□



(a) (b)

図 2: (a) 部分グラフ G_1, G_2，(b) 部分グラフ $G_{s1}, \overline{G_{s1}}$.

定理 1 と補題 1 より次の系が成り立つ．

系 1．任意の直並列グラフ G は，$W \leq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor + 1, H \leq \lfloor 2n(G)/3 \rfloor - 1$ なる格子描画を持つ．また，その描画は線形時間で求まる．

参考文献

[1] M. Chrobak and T. H. Payne, “A linear-time algorithm for drawing a planar graph on a grid,” Information Processing Letters, Vol. 54, pp. 241-246, 1995.