A-009

正方形一斉射撃アルゴリズムの実現に関する考察

池上　正敏†　内野　博貴†　梅尾 博司†

1. はじめに

Shinahr によって 2 次元セルラーオートマトン上における一斉射撃問題が提唱されて以来, 現在までに多くのアルゴリズムが考案されている.2 次元長方形セルラーオートマトンにおける最適時間一斉射撃アルゴリズムに比べ，正方形セルラーオートマトン上における最適時間一斉射撃アルゴリズムはあまり研究されていない.

本稿では，正方形セルラーオートマトン上における最適時間一斉射撃アルゴリズムを設計し，それを計算機上に実装する.

2. セルラーオートマトン

セルラーオートマトンとは，セルと呼ばれる有限個の状態を持つオートマトンの集合である．2 次元セルラーオートマトンは，セルが平面上に格子構造で配置されたモデルである．全てのセルは，上，下，左，右に配置されたセルと通信リンクで接続されており，自身の状態と隣接するセルの状態を基に状態遷移を行う．状態遷移は全てのセルで同時に行う.

3. 一斉射撃問題

一斉射撃問題とは，時刻 $t = 0$ において，将軍状態 (General) と呼ばれる状態のセルを 1 つ配置し，残りのセルに静止状態と呼ばれる状態を設置する. そして $t = \alpha(\alpha > 0)$ において全てのセルを射撃状態と呼ばれる状態に遷移させるアルゴリズムを作成する事が一斉射撃問題の目的である．射撃状態は，$t = \alpha$ の時刻以外に現れる事は無く全てのセルが同時に射撃状態になる事で一斉射撃は終了する.

また一斉射撃問題には，最適時間というものがある. 最適時間とは，それ以上の時間では同期しないという時間で，1 次元ではサイズ n,2 次元ではサイズ $n \times n$ ともに $2n - 2$ の時間で同期することが証明されている.

4. アルゴリズム

4.1 セル空間の分割

今回一斉射撃させるものは，サイズ $n \times n$ の正方形型で，2 次元セル空間を図 1 のように，2 つのセル空間（α 空間，α’ 空間）とし，2 つの空間は対角線を中心として対称の動作を行い信号を伝搬する．したがって，α 空間に焦点を置き説明する.

α 空間は横に n 個，縦に n 個のセルが並ぶ直角二等辺三角形の形をした空間である.

† 大阪電気通信大学大学院　工学研究科　情報工学専攻

このα空間を図 2 のように L_1 から L_n とし，それぞれを 1 次元セル列として考える.

しかし，ここで同期時間が問題となる．α空間の同期時間は，2 次元における最適時間 $2n-2$ での同期を目指すが，$t = 0$ に配置された将軍状態 G から L_n の 1 番上のセルに信号が到達するまでに $n - 1$ の時間が必要で，L_n を同期させるために既存の 1 次元一斉射撃アルゴリズムを動作させ $2n - 2$ の時間かかるならば，$3n - 3$ の時間が必要となる．そこで，セル数 n のセル列を $n - 1$ の時間で同期させる工夫が必要となる．次節では、その点について述べる.

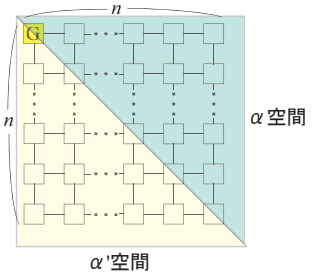

図 1: 2 つのセル空間への分割

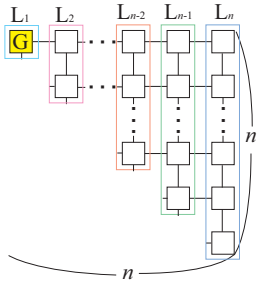

図 2: α 空間の分割

4.2 1 次元セル列へのマーキング

1 次元セルラーオートマトン上での一斉射撃アルゴリズムの最適時間は，セル数が n の 1 次元セル列は $2n-2$ の時間である．しかし，そのセル列を $n - 1$ の時間で同期させなければ，正方形型の最適時間で動作しない事は述べた．そこで，セル列をさらに分割する. そして，特定のセルへマーキングを行う事でセルを分割し，セル数 n のセル列を $n - 1$ の時間以内で同期さる．ここでは，そのマーキングする位置について説明する.

まず，大きさ n の 1 次元セル列を半分に分割，2 つに分割された空間の片方をさらに半分，とういう具合に分割することを繰り返す. この分割した空間を一斉射撃させることによって同期時間を $n - 1$ 以内で同期させる. このため 1 次元セル列を $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$ …，とセル列の端から $\frac{1}{2^k}$(ただし，$k \geq 1$) の位置にマーキングする. しかし，このマーキングでは分割したセル空間の同期時間が，セル列が将軍状態から偶数番目の時は $n-2$, 奇数番目の時は $n-3$ と早く同期してしまう. この問題を解決するための方法については，後に述べる.

4.3 マーキング位置の探索方法

各セル列に行うマーキング位置の探索は図 3 のように，マーキング信号 S_M によって行われる．S_M 信号は，マーキング位置を通過する事によって必要な位置をマーキン

グするが，マーキングを行う位置やその数はセル列の長さに依存するため，各セル列にあった方法をとる必要があった．ここでは，各セル列のマーキング位置へマーキングを行う S_M 信号について説明する．

S_M 信号は,S_H 信号と S_D 信号の間を伝搬する．今後は S_H 信号に近い S_M 信号から S_{M1}，S_{M2}, $\cdots$ S_{Mk} と呼ぶ．これらの S_M 信号は, 各セル列の中点を探索する信号であるので,S_M 信号が通る位置は，S_{M1} 信号は S_H 信号と S_D 信号の中点，S_{M2} 信号は，S_{M1} 信号と S_D 信号の中点，$\cdots$ S_{Mk} 信号は S_{Mk-1} 信号と S_D 信号の中点となる．すなわち，S_{Mk} 信号がマーキングを行う位置は，S_H 信号のある位置を基点として，全体のセル列の $\frac{2^k-1}{2^k}$ の位置に対してマーキングを行う．

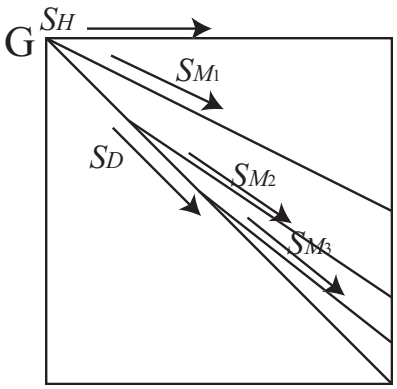

図 3: マーキング信号 S_M の軌跡

5. 計算機への実装

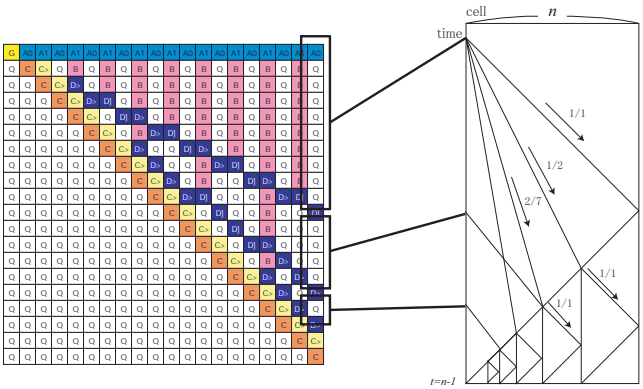

図 4: セルへのマーキングと時間空間図式

マーキング行った部分を壁状態とみなし，壁状態までを大きさ n の 1 次元セル列とみなしこのセル列を Mazoyer のアルゴリズムを使用して一斉射撃を行う. 図 4 には大きさ n のセル列を一斉射撃させる時間空間図式を示す.

実装にあたってはいくつかの工夫する点がある．それについて述べる．

まず前節で述べた，マーキングしたセルを壁状態とし，その壁状態までを一斉射撃させる際に，偶数番目のセル列が 1 ステップ，奇数番目のセル列が 2 ステップ早く同期してしまう問題についての解決をする. この問題は，将軍状態の生成を，それぞれにおいて，早く同期してしまうステップ数ずつ遅らせることによって同期をとる．しかし，将軍状態の生成が遅くなることにより，信号の伝播も遅れてしまう. そうすると全体での同期時間も遅れてしまう．そこで，信号の役割をする状態を使い，信号は遅れることなく伝播するようにし，将軍の生成だけを遅らせる方法をとる．これにより，全体での同期時間が最適時間で一斉射撃する．

次に，1 次元のセル列には Mazoyer のアルゴリズムを使用しているが，そのアルゴリズムとは異なった遷移をする部分がある．図 5 はサイズ $n = 9$ の Mazoyer のアルゴリズムであり，図 6 はサイズ $n = 9$ の各セル列を 1 次元とみなした，実装するアルゴリズムである．図 5 では，状態”B”が次のステップで状態”A”に遷移しているのに対し，図 6 では，状態”b”が次のステップでは状態”q”へと遷移している．これは 1 次元では左右の状態を元に状態遷移を行うのに対して，2 次元では上下左右の状態をを元に遷移を行うためである．これを解決するため図 7 ように，状態”b”とは違う状態”b+”を使う．これにより異なった遷移を防ぐ.

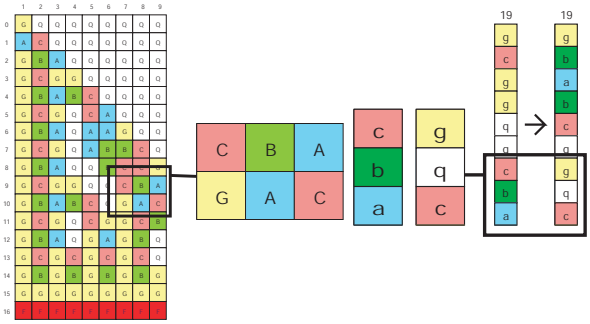

図 5: Mazoyer のアルゴリズム

図 6: 実装するアルゴリズム

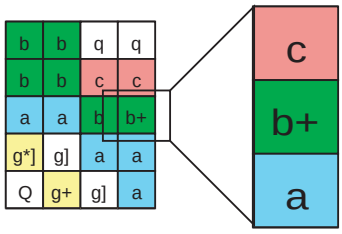

図 7: 状態”b”とは違う状態”b+”

6. おわりに

本稿では、正方形セルラーオートマトン上において空間をマーキングにより分割，Mazoyer のアルゴリズムを使用し，最適時間で一斉射撃を行うアルゴリズムを実装した.

今後の課題として，実装したアルゴリズムにおいて，状態数を削減したアルゴリズムの開発をしていきたい.

参考文献

[1] I. Shinahr: Two- and three-dimensional firing-squad synchronization problems. *Information and Control*, 24, pp.163-180(1974).

[2] J. Mazoyer: A six-state minimal time solution to the firing squad synchronaization problem. *Theoretical Computer Sience*, vol. 50, pp.183-238(1987).