

凸射影法による投影からの情報復元 Image Reconstruction by the Method of Convex Projections

青柳 智裕 大坪 紘一 青柳 宣生
Tomohiro Aoyagi Kouichi Ohtsubo Nobuo Aoyagi

1. はじめに

X線 CT(Computed Tomography)や PET(Positron Emission Tomography)に代表される医用診断装置における画像再構成問題は、任意の生体内部における形態又は機能の断層像をいかに高精細に視覚化することにある。物理的には、いろいろな方向からの投影によって得られた情報から物体を再構成する問題であり、一般的には観測されるデータが不十分なものとなり一意的な再構成は不可能になる。このような観測データから元になる物理的な分布を求めることを逆問題という。観測データを g 、未知の物理量を f とすると画像再構成問題は次のような積分方程式として定式化される[1-7]。

$$g(y) = \int_a^b K(x,y)f(x) dx. \quad (1)$$

これは、Fredholmの第一種積分方程式となる。この問題を解く場合、積分作用素を離散化することによって行列の形で表現することになる。有限次元のベクトル空間を考えれば、観測データを N 次元、未知データを M 次元とすると、 $N \times M$ の行列となる。 $N = M$ の正則行列ならば逆行列が存在して、観測データに逆行列をかけることで未知データが復元又は再構成できる。しかし、一般的には正則行列になることはないで、その解の存在と一意性の保証はない。そこで、事前にわかっている情報を不等式又は等式で与えられた制約条件として、目的関数を最大化又は最小化することによって解を求める数理計画問題として取り扱う必要がある。数学的には、Hilbert空間における元 f に対してその事前情報を表す部分集合が与えられたとき、観測によって得られる元 g から f を求めることになる。Hilbert空間における部分集合が閉凸集合であり、それに対する凸射影作用素が与えられれば、凸射影法(Projections Onto Convex Sets: POCS)によってその解を求めることができる[3,8]。POCSは積分方程式の反復解法として提案されたものであり、これまで、CT、電子顕微鏡、パターン認識、位相復元、画像圧縮、画像復元などの一般的な画像処理などに使われてきた[9-15]。代数的再構成法(Algebraic Reconstruction Techniques: ART)もその一つで、直交射影を何回も使い連立方程式の解を近似的に求めるものである。本研究では、凸射影法を画像再構成の問題に適用して、その画質の評価を行う。

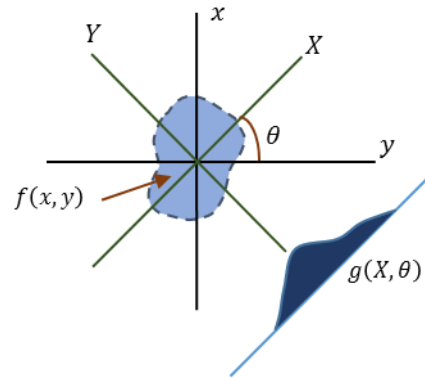


Fig.1. An object, $f(x, y)$, and its projection, $g(X, \theta)$, are shown for an angle of θ .

2. 投影からの画像再構成

2次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 上に直交座標系を考える。平面上の点を (x, y) で表すことにする。原点を中心に θ° 回転させた座標を (X, Y) で表す。被写体又は X線吸収係数や核種の分布を $f(x, y)$ で表す。これに対して θ 方向へ投影されたデータ $g(X, \theta)$ を次のように定義する。

$$g(X, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dY. \quad (2)$$

この投影 $g(X, \theta)$ は、CTスキャナの場合、X線のビームが被写体を通じた後の強度を対数変換することにより求めることができ、また PETの場合は同時係数のカウント数として得られる。このようにして測定された投影データ $g(X, \theta)$ を被写体において全角度 $0 \leq \theta < 2\pi$ に対して与えられたとき、被写体を表す原分布 $f(x, y)$ を求めることが画像再構成の問題である。Fig. 1に直交座標系における物体とその平行投影データを図示する。

3. 凸射影法

C_1, C_2, \dots, C_m を Hilbert空間における閉凸集合とし、 C_0 をその共通部分とする。

$$C_0 = \bigcap_{i=1}^m C_i. \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, m$ に対して、 P_i を集合 C_i への射影作用素とし、それに対応する緩和射影作用素を T_i とする。ただし、 T_i は次のよう定義する。

$$T_i = I + \lambda_i(P_i - I), \lambda_i \in (0, 2). \quad (4)$$

ここで、 λ_i は緩和パラメータといい、収束の速さを調整するものである。さらに、連続的に T_i を作用させる作用素 T を定義する。

$$T = T_m T_{m-1} \cdots T_1. \quad (5)$$

定理(POCS の基本定理)

C_0 は空集合ではないとする。そのとき、任意の $x \in \mathcal{H}$ と $\lambda_i \in (0,2), i = 1,2, \dots, m$ に対して数列 $\{T^n x\}$ は C_0 のある点に弱収束する。

この定理は、1982 年に Youla et al. によって非拡大作用素の不動点定理を用いて証明された[8]。有限次元の空間において、 $\{T^n x\}$ は C_0 の元に強収束する。

画像再構成で使われる凸集合を以下に示す[10]。

$$1) C_\alpha = \{f: f \in \mathcal{H}, f(x,y) = 0 \text{ for } (x,y) \notin D\}. \quad (6)$$

C_α は、有限領域 D に空間的に帯域制限された Hilbert 空間上のすべての関数と考える。つまり、関数はコンパクトサポートである。 C_α への射影は次のようになる。

$$P_\alpha f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in D \\ 0 & (x,y) \notin D \end{cases} \quad (7)$$

$$2) C_\beta = \{f: f \in \mathcal{H}, f(x,y) \geq 0 \text{ for all } (x,y) \in D\}. \quad (8)$$

C_β は、非負となる Hilbert 空間のすべての関数とする。 C_β への射影は次のようになる。

$$P_\beta f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{if } f \geq 0 \\ 0 & \text{if } f < 0 \end{cases} \quad (9)$$

$$3) C_\gamma = \{f: f \in \mathcal{H}, a \leq f(x,y) \leq b\}. \quad (10)$$

C_γ は、関数の値が領域 $[a, b]$ に制限された Hilbert 空間上の関数とする。 C_γ への射影は次のようになる。

$$P_\gamma f(x,y) = \begin{cases} a & f(x,y) < a \\ f(x,y) & a \leq f(x,y) \leq b \\ b & f(x,y) > b \end{cases} \quad (11)$$

Hilbert 空間において投影によって得られる集合 C を次のように定義する。

$$C = \{f: \langle f, a \rangle = b\}. \quad (12)$$

今、 $g_1, g_2 \in C, g_3 = \alpha g_1 + (1-\alpha)g_2$, for $\alpha \in [0,1]$ とする。

$$\begin{aligned} \langle g_3, a \rangle &= \langle \alpha g_1 + (1-\alpha)g_2, a \rangle \\ &= \alpha \langle g_1, a \rangle + (1-\alpha) \langle g_2, a \rangle \\ &= \alpha b + (1-\alpha)b = b. \end{aligned} \quad (13)$$

従って、 $g_3 \in C$ 。よって C は凸集合となる。

次に、 $\{f^k\}$ を $f^k \rightarrow f^*$ となる C 上の数列とする。Schwarz の不等式により、

$$\begin{aligned} |\langle f^k, a \rangle - \langle f^*, a \rangle| &= |\langle f^k - f^*, a \rangle| \\ &\leq \|f^k - f^*\| \cdot \|a\| \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (14)$$

従って、

$$\langle f^*, a \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle f^k, a \rangle = b. \quad (15)$$

$f^* \in C$ なので、 C は閉集合となる。

ここで、任意の f による C 上への射影作用素を次のように定義する。

$$Pf = \begin{cases} f & \text{if } f \in C \\ f + \frac{b - \langle f, a \rangle}{\|a\|^2} a & \text{otherwise} \end{cases} \quad (16)$$

この射影作用素 P は凸射影作用素となる[3]。

式(16)は ART のアルゴリズムの基礎となる。ART は、投影によって得られる凸集合への射影によって構成されている。有限次元のベクトル空間において ART は強収束する。

4. 計算機シミュレーション

観測領域を等間隔に離散化し、最小構成単位をピクセルと考える。ピクセルは左上を 1 とし、順番に番号を割り当て、右下を M とする。従って、 $f \in \mathbb{R}^M$ となる。再構成される物体は、 j 番目のピクセル f_j としその中で一様な値とする。投

影データは平行投影系を考え、 $0 \sim 180^\circ$ を等間隔で離散化し、検出器も離散化する。 0° の View の検出器の左端を 1 とし、順番に番号を割り当て、最後の View の右端を N とする。投影データは、 i 番目の線積分値を g_i とする。従って、 $g \in \mathbb{R}^N$ となる。 i 番目の線と j 番目のピクセルの共通部分の長さを a_j^i で表す。Fig. 2 に観測系の離散化モデルを示す。

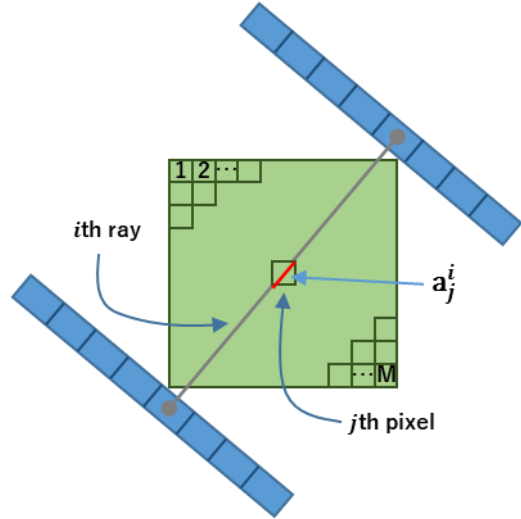


Fig. 2. The fully-discretized model of the image reconstruction problem.

それぞれの線積分又は投影データは、次のような線形方程式で表現することができる。

$$\sum_{j=1}^M a_j^i f_j = g_i, \quad i = 1,2, \dots, N. \quad (17)$$

または、次のように行列表現できる。

$$g = Af. \quad (18)$$

ART による再構成アルゴリズムは次のようになる。

① 先ず、初期値を与える。 $f^0 \in \mathbb{R}^M$

② $k+1$ 番目の推定値は k 番目の推定値を使って、次の式によって更新される。

$$f^{k+1} = f^k + \lambda_k \frac{g_i - \langle a^i, f^k \rangle}{\|a^i\|_2^2} a^i. \quad (19)$$

ここで、 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 、緩和パラメータ $\lambda_k \in (0,2)$ 、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積とする。

$$\langle a^i, f^k \rangle = \sum_{j=1}^M a_j^i f_j^k. \quad (20)$$

ここで、 $\|\cdot\|_2$ は ℓ^2 -ノルムを表す。

ART アルゴリズムを凸射影法と考えると、次のように表すことができる。

$$f^{k+1} = P_{\text{ART}} f^k. \quad (21)$$

ただし、 P_{ART} は次のように定義する。

$$P_{\text{ART}} = P_N \cdots P_2 P_1. \quad (22)$$

つまり、閉凸集合 $C_i, i = 1, \dots, N$ への射影作用素の N 個の合成とする。

今回初期値は原点とし、緩和パラメータは 0.01 と設定した。平均 2 乗誤差(Normalized Mean Square Error:NMSE)は次の式で定義する。

$$NMSE(k) = \frac{\|f^k - f\|_2^2}{\|f\|_2^2} \quad (23)$$

ここで、 f は原画像とする。



Fig. 3. The Original test image (128×128pixel, 8bpp) and its projection data (Sinogram: 128 Detectors, 100 Views and 8bpp.)

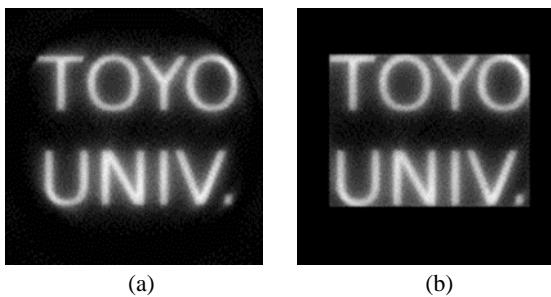


Fig.4. The reconstructed image using (a) ART (10 iterations), (b) ART with P_α, P_β and P_γ (10 iterations).

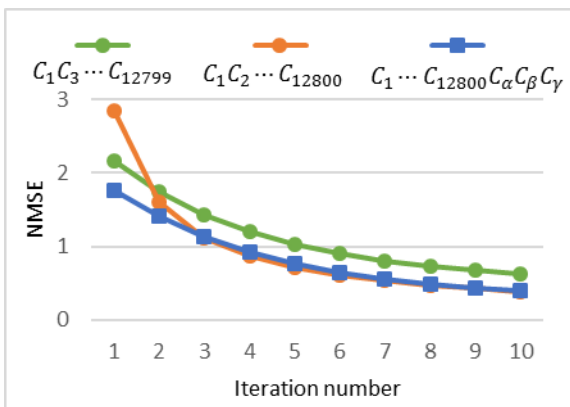


Fig. 5. Plots of the normalized mean square error versus iteration number.

Fig.3 は原画像とその投影データである。投影データは、検出器を 128 個にし、100 方向の View によって得たものである。Fig.4 は再構成した画像である。(a)は ART のみの結果である。 $f^{k+1} = P_{ART}f^k$ によって更新していき、反復回数は 10 回まで行った。(b)は ART と事前情報への射影 $P_\alpha P_\beta P_\gamma$ を用いたときの画像である。 $f^{k+1} = P_\gamma P_\beta P_\alpha P_{ART}f^k$ によって更新していき、反復回数は 10 回まで行ったものである。

Fig.5 は反復回数に対する NMSE の値を示したものである。緑のラインは ART により 6400 の凸射影を使って再構成した時のものである。 $f^{k+1} = P_{12799}P_{12797} \cdots P_3P_1f^k$ として更新をしていった。オレンジのラインは 12800 全ての凸射影を使って再構成したものである。 $f^{k+1} = P_{12800}P_{12799} \cdots P_2P_1f^k$ 。青のラインは 12800 全てと $C_\alpha, C_\beta, C_\gamma$

への凸射影を組み合わせたときの誤差である。 $f^{k+1} = P_\gamma P_\beta P_\alpha P_{12800} \cdots P_2P_1f^k$ 。凸集合への射影を増やし、反復回数を増やしていくことで誤差が減少していくことが分かる。

5. まとめと今後の課題

画像再構成における観測系を離散化することによって、行列によって表現してきた。事前情報への射影と ART を組み合わせることによる凸射影法によって、投影データから画像を再構成する問題に適用してきた。凸射影の数と反復回数を増やすことで誤差が小さくなることを示した。

事前情報が凸集合になれば、凸射影法に組み込むことができるが、今回使用したもの以外もあるので、それらを組み込んでいく必要がある。実際には、事前情報から元の物体が属する空間をいかに数式として表現し、その空間への射影作用素をいかに構成するかが重要な問題となる。またそれらの凸集合による共通部分が空集合にならないことが条件となる。投影データ数と物体の画素数が増えると計算時間が増えることが問題となる。ART に関しては、初期値と緩和パラメータの取り方によって収束の速さが異なるので、観測系に対して最適なパラメータを求める必要がある。

References

- [1] G. T. Herman, "Fundamentals of Computerized Tomography", 2nd Edition, Springer-Verlag London (2009).
- [2] A. C. Kak, M. Slaney, "Principles of computerized tomographic imaging", IEEE Press, New York, (1988).
- [3] H. Stark, Y. Yang, "Vector Space Projection", John Wiley & Sons, Inc. NY (1998).
- [4] H. J. Trussel, M. J. Vrhel, "Fundamentals of Digital Imaging", Cambridge University Press (2008).
- [5] A. Imiya, Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo (1985).
- [6] M. Bertero, C. D. Mol, E. R. Pike, "Linear inverse problems with discrete data. I : General formulation and singular system analysis", Inverse Problems, **1** (1985) pp.301-330.
- [7] M. Bertero, C. D. Mol, E. R. Pike, "Linear inverse problems with discrete data: II. Stability and regularization", Inverse Problems, **4** (1988) pp.573-594.
- [8] D. C. Youla, H. Webb, "Image restoration by the method of convex projections: part 1-theory", IEEE Trans. Med. Imaging, **1** (1982) pp.81-94.
- [9] Y. Censor, T. Elfving, G. T. Herman, T. Nikazad, "On diagonally-relaxed orthogonal projection methods", SIAM J. Sci. Comput. **30**, (2008) pp.473-504.
- [10] P. Oskoui-fard, H. Stark, "Tomographic image reconstruction using the theory of convex projections", IEEE Trans. Med. Imaging, **7** (1988) pp.45-58.
- [11] M. I. Sezan, H. Stark, "Tomographic image reconstruction from incomplete view data by convex projections and direct Fourier inversion", IEEE Trans. Med. Imaging, **3** (1984) pp. 91-98.
- [12] M. I. Sezan, H. Stark, "Image restoration by the method of convex projections: part 2-applications and numerical results", IEEE Trans. Med. Imaging, **1** (1982) pp.95-101.
- [13] Y. Censor, "Finite series-expansion reconstruction methods", Proc. IEEE, **71**(1983) pp.409-419.
- [14] H. Kudo, T. Saito, "Sinogram recovery with the method of convex projections for limited-data reconstruction in computed tomography", J. Opt. Soc. Am. A, **8** (1991) pp. 1148-1160.
- [15] H. H. Bauschke, P. L. Combettes, D. R. Luke, "Hybrid projection-refraction method for phase retrieval", J. Opt. Soc. Am. A, **20** (2003) pp.1025-1034.
- [16] A. Wouk, "A Course of Applied Functional Analysis", John Wiley & Sons, Inc. NY(1979).