CA-004

最大リグレット最小化巡回セールスマン問題に対する発見的解法

長谷川　和樹 †　　　呉　偉 ‡
静岡大学 †　　　静岡大学 ‡

1　はじめに

巡回セールスマン問題（TSP）とは，n 個の都市が地図上にあるとしたとき，セールスマンがある都市から出発し，すべての都市を１度訪れてから初めの都市に戻ってくるような道のり（巡回路）のうち，最も効率の良いものを探す問題である．TSP は，$\mathcal{NP}$ 困難のクラスに属す組合せ最適化問題の代表例であるという理論的な面だけではなく，豊富な応用を持つ重要な問題であるため，多くの研究者が 80 年以上に渡り挑戦し続けてきた．

しかしながら，現実世界の問題を考えると，各都市間のコストは常に一定ではないことがほとんどである．例えば，道の混み具合やその日の天気などによって都市 i から都市 j へ移動するのにかかる時間は常に一定であるとは考えにくい．

本研究では，都市 i, j の間の移動コスト（距離もしくは時間）d_{ij} を連続区間 $[d_{ij}^-, d_{ij}^+]$ から取る不確定なものとして考える．リグレットとは，ある巡回路とあるシナリオについて，その巡回路における目的関数値（巡回路の長さ）とそのシナリオにおける TSP の最適値（最適な巡回路の長さ）の差のことを言い，文字通りこの巡回路を選んだことのリグレットの度合いを表している．本研究で扱う最大リグレット最小化巡回セールスマン問題（MMR-TSP）はすべてのシナリオにおける最も大きなリグレットをできるだけ小さくするような巡回路を得る問題である．

MMR-TSP に対して，厳密手法である Benders-like 分解法と分枝カット法を紹介した上，0-1 整数計画モデルに適用できる反復双対置換法を適応してみる．Montemanni ら [1] により，2-opt, 3-opt などの近傍をベースにした局所探索法は，古典的な TSP にとって非常に有効であるが，MMR-TSP に対してはほとんど効果がないことがわかっている．本研究では，このような非常に特殊な性質を持つ MMR-TSP に対して新たな発見的解法を提案する．計算実験では提案手法，既存手法，および既存研究の結果を比較することによって提案手法の有効性を確認する．

Heuristics for the robust traveling salesman problem under min-max regret criterion
†Kazuki HASEGAWA, Shizuoka University
‡Wei WU, Shizuoka University

2　問題説明

2.1　巡回セールスマン問題

ノード（都市）の集合 $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ に基づく有向完全グラフ $G = (V, E)$ と，各枝 $(i, j) \in E$ に対応するコスト（都市 i から j までの距離）d_{ij} を入力とする．巡回セールスマン問題（traveling salesman problem, TSP）は，各ノードをちょうど１回訪問する最も短い巡回路を探す問題である．

枝 (i, j) を巡回路に含むとき１そうでないとき０となる 0-1 決定変数 x_{ij} を利用すると，部分巡回路（一部のノードのみを巡回する巡回路）を許容する TSP の緩和問題は

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in E} d_{ij}x_{ij} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{i\in V:\\(i,j)\in E}} x_{ij} = 1 \qquad \forall j \in V \tag{2}$$

$$\sum_{\substack{j\in V:\\(i,j)\in E}} x_{ij} = 1 \qquad \forall i \in V \tag{3}$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \qquad \forall (i, j) \in E \tag{4}$$

のように表現できる．目的関数 (1) は巡回路のコストを最小化する．制約 (2)–(3) は各ノードをちょうど１回訪問することを表す．しかし，これらの制約のみならば，部分巡回路が複数あり，それらを合わせてすべてのノードを訪れる解を実行可能解として許容してしまう．よって，緩和問題 (1)–(4) からさらに部分巡回路を除くような制約を追加する必要がある．以下，部分巡回路を除くための制約を３種類紹介する．

Dantzig ら [2] は以下のような制約を用いて部分

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

巡回路を排除する方法を提案した:

$$\sum_{i,j\in S} x_{ij} \leq |S|-1 \qquad \forall S\subset V, S\neq\emptyset. \tag{5}$$

DFJ モデル (1)–(5) は与えられたノードのすべての真部分集合 S を考慮し，S に属するノードのみを含む巡回路をすべて排除することで部分巡回路を除く．式 (5) に含む制約の数が $\mathcal{O}(2^n)$ になるため，混合整数計画（mixed integer programming, MIP）ソルバーを利用して解くときにはあらかじめ制約 (5) に含むすべての真部分集合 S を考慮するのではなく順次追加していくことで効果的に働くことが知られている．

Miller ら [3] は，部分巡回路排除制約を多項式数で定義する方法を提案した．各ノード i に対する連続補助変数 u_i を用いると MTZ モデルの部分巡回路排除制約は

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n-1 \quad \forall(i,j)\in E, j\neq 1 \tag{6}$$
$$u_i \geq 0 \quad \forall i\in V\setminus\{1\} \tag{7}$$
$$u_1 = 0 \tag{8}$$

と表現できる．MTZ モデル (1)–(4), (6)–(8) は各ノードにポテンシャルのような概念として u_i を与え，巡回路の中で隣接するノードとのポテンシャルの大小関係を常に守らせることによって部分巡回路を許さないようにするモデルである．

Gavish と Graves [4] は，(6)–(8) 以外にもう 1 つ部分巡回路排除制約を多項式数で定義する方法を提案した．各 $(i,j)\in E$ における連続補助変数 z_{ij} を用いて部分巡回路を排除する制約

$$z_{ij} \leq (n-1)x_{ij} \quad \forall(i,j)\in E \tag{9}$$
$$\sum_{\substack{j\in V:\\(1,j)\in E}} z_{1j} = n-1 \tag{10}$$
$$\sum_{\substack{j\in V:\\(i,j)\in E}} z_{ij} - \sum_{\substack{j\in V:\\(j,i)\in E}} z_{ji} = -1 \quad \forall i\in V\setminus\{1\} \tag{11}$$

を考えた．GG モデル (1)–(4), (9)–(11) は与えられたグラフをフローネットワーク，$\boldsymbol{z}$ をフローの流量とみなし，ノード 1 で $n-1$ 単位の供給，それ以外の各ノードで 1 単位の需要があるとした場合のフローを流すことによって部分巡回路を除くことができる．このような特徴から GG モデルは network-flow モデルとも呼ばれている．

2.2 最大リグレット最小化巡回セールスマン問題

本研究で考える最大リグレット最小化巡回セールスマン問題（min-max regret traveling salesman problem, MMR-TSP）では，古典的な TSP と異なり，各枝 $(i,j)\in E$ のコスト d_{ij} を確定的な値ではなく与えられる下限 d^-_{ij} と上限 d^+_{ij} の間を任意にとることができる不確定な値として扱う．取り得るすべてのシナリオの集合を $S=\{\boldsymbol{d}\mid d_{ij}\in[d^-_{ij},d^-_{ij}],\forall(i,j)\in E\}$，TSP の実行可能解集合を X と定義する．解 $\boldsymbol{x}$ の最大リグレット $r_{\max}(\boldsymbol{x})$ は

$$r_{\max}(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{d}\in S}\left\{\sum_{(i,j)\in E} d_{ij}x_{ij} - \min_{\boldsymbol{y}\in X}\sum_{(i,j)\in E} d_{ij}y_{ij}\right\}$$

となり，MMR-TSP は最大リグレットが最小となる巡回路 $\boldsymbol{x}$ を探す問題 $\min_{\boldsymbol{x}\in X} r_{\max}(\boldsymbol{x})$ である．

MMR-TSP の解法について述べる前に，重要な概念である最悪シナリオについて説明する．最悪シナリオは解 $\boldsymbol{x}$ が与えられた場合，$\boldsymbol{x}$ にとって最も都合の悪いシナリオ，すなわち，$r_{\max}(\boldsymbol{x})$ となるときのシナリオである．

補題 1 ([5])**.** 解 $\boldsymbol{x}$ の最悪シナリオの 1 つは

$$d^{\sigma(\boldsymbol{x})}_{ij} = \begin{cases} d^+_{ij} & \text{if } x_{ij}=1 \\ d^-_{ij} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall(i,j)\in E \tag{12}$$

のように定義でき，解 $\boldsymbol{x}$ の線形な組合せ

$$d^{\sigma(\boldsymbol{x})}_{ij} = x_{ij}d^+_{ij} + (1-x_{ij})d^-_{ij} \quad \forall(i,j)\in E \tag{13}$$

で記述できる．

補題 1 を用いると，MMR-TSP は

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\left\{\sum_{(i,j)\in E} d^+_{ij}x_{ij} - \min_{\boldsymbol{y}\in X}\sum_{(i,j)\in E} d^{\sigma(\boldsymbol{x})}_{ij}y_{ij}\right\} \tag{14}$$

のように表現することができる．

3 厳密解法

MMR-TSP のモデル (14) は 2 段階の最適化問題であり，そのままだと解くことが困難である．ここで，多くの手法に使用されるモデルの変形を説

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

明する．モデル (14) の $\boldsymbol{y}$ に関する部分問題を連続補助変数 λ で置き換えると，MMR-TSP は

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in E} d^+_{ij} x_{ij} - \lambda \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{x} \in X \tag{16}$$

$$\sum_{(i,j)\in E} d^{\sigma(\boldsymbol{x})}_{ij} y_{ij} \geq \lambda \quad \forall \boldsymbol{y} \in X \tag{17}$$

と記述できる．モデル (15)–(17) には与えられた MMR-TSP の実行可能解の個数と同数の制約 (17) が存在するため，モデルの構築が困難である．

3.1 Benders-like 分解法

Benders-like 分解法では，まず制約 (17) の集合 X を部分集合 $X' \subseteq X$ に置き換えた緩和問題 $P(X')$ を厳密に解く．次に，得られた最適解 $(\boldsymbol{x}', \lambda')$ の実行可能性の判定問題を考える．この判定問題は，不等式 (17) の左辺が最小となるときにその値が λ' より小さくなるかを判定する問題で，不確かさのない TSP

$$Q(\boldsymbol{x}') : \qquad \min_{\boldsymbol{y}\in X} \sum_{(i,j)\in E} d^{\sigma(\boldsymbol{x}')}_{ij} y_{ij}$$

を解くことで判定できる．問題 $Q(\boldsymbol{x}')$ の最適値が λ' 以上であれば解 $(\boldsymbol{x}', \lambda')$ は問題 (15)–(17) の実行可能解であり，$\boldsymbol{x}'$ は MMR-TSP の最適解であると結論付けることができる．そうでない場合は問題 $Q(\boldsymbol{x}')$ の最適解 $\boldsymbol{y}'$ に対して $X' \leftarrow X' \cup \{\boldsymbol{y}'\}$ としたのちに再び緩和問題 $P(X')$ を解く．このようにして，MMR-TSP(15)–(17) の実行可能解が得られるまで反復を繰り返す．各反復において，緩和問題 $P(X')$ の最適値が MMR-TSP の下界であり，評価値が

$$r_{\max}(\boldsymbol{x}') = \sum_{(i,j)\in E} d^+_{ij} x'_{ij} - [Q(\boldsymbol{x}') \text{ の最適値}]$$

となる MMR-TSP の実行可能解 $\boldsymbol{x}'$ が得られるため，発見的解法としても利用できる．

3.2 分枝カット法

分枝カット法では，緩和問題 $P(X')$ を解く際に分枝限定法の枠組みを利用する．整数解 $\boldsymbol{x}^*$ を発見するたびに $\boldsymbol{x}^*$ について問題 $Q(\boldsymbol{x}^*)$ を解く．解 $(\boldsymbol{x}^*, \lambda^*)$ が違反する制約 (17) が発見された場合，その制約を新たなカットとして決定木に追加する．そうでない場合は暫定値を更新し，現在のノードを終端する．分枝カット法は早い段階で良い実行可能解に到達する傾向があるため，時間制限のある状況においては発見的解法としても有用である．

4 発見的解法

4.1 シナリオ固定法

不確かさのない TSP の実行可能解は，MMR-TSP の実行可能解でもある．シナリオ固定法は，ある固定したシナリオ $\boldsymbol{d}$（$\boldsymbol{d} \in S$ とは限らない）の下で TSP を厳密に解くことで MMR-TSP の 1 つの実行可能解を求める手法である．固定したシナリオが $\boldsymbol{d}^* = (\boldsymbol{d}^+ + \boldsymbol{d}^-)/2$ であるとき，シナリオ固定法で得られる解の評価値は最適値の 2 倍以内に抑えられることが知られている [6]．シナリオ固定法は不確かさのない TSP を 1 度解くのと同義なので比較的高速に解を求めることができる．

4.2 双対置換法

問題 (14) の $\boldsymbol{y}$ に関する部分問題をその線形緩和問題の双対問題で置換することによって，その部分問題が最小化問題から最大化問題に置換され，最小化の MIP として扱うことができる．このようなアプローチが双対置換法 (dual substitution method, DS 法) と呼ばれる．TSP の実行可能領域 X を表現するとき，節 2.1 で示したように DFJ，MTZ，GG の 3 種類のモデルが考えられるため，DS 法を適用するときに $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に関する実行可能領域の表現にそれぞれ 3 種類の組合せが考えられる，すなわち，合計 9 種類の DS モデルの構築が可能である．ただし，$\boldsymbol{y}$ に関する部分問題を DFJ モデルで表現する場合，その双対問題に $\mathcal{O}(2^n)$ 本の列が存在するため，列生成しながら解く必要があり，他のモデルより困難である．本研究では $\boldsymbol{y}$ に関する実行可能領域が MTZ モデルと GG モデルで表現されるときの DS モデルを対象として説明する．$\boldsymbol{x}$ の実行可能領域の表現に A モデル（$A \in$ {DFJ，MTZ，GG}），$\boldsymbol{y}$ の実行可能領域の表現に B モデル（$B \in$ {MTZ，GG}）を使用した DS モデルをモデル $D(A, B)$ と呼ぶ．

まず，$\boldsymbol{y}$ の実行可能領域の表現に MTZ モデルを使用した DS モデルを説明する．MTZ モデルの

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

制約 (2) に対応する双対変数 $\boldsymbol{\alpha}$，制約 (3) に対応する双対変数 $\boldsymbol{\beta}$，制約 (6)–(8) に対応する双対変数 $\boldsymbol{\zeta}$ を定義すると，モデル $D(\cdot, \mathrm{MTZ})$ は

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in E} \left(d^{+}_{ij} x_{ij} + (n-1)\zeta_{ij} \right) - \sum_{i\in V} (\alpha_i + \beta_i) \\
\text{s.t.} \quad & \alpha_j + \beta_i - n\zeta_{ij} \le d^{\sigma(x)}_{ij} && \forall (i,j) \in E \\
& \sum_{\substack{j\in V: \\ (j,i)\in E}} \zeta_{ji} - \sum_{\substack{j\in V: \\ (i,j)\in E}} \zeta_{ij} \le 0 && \forall i \in V \setminus \{1\} \\
& \zeta_{ij} \ge 0 && \forall (i,j) \in E, j \ne 1 \\
& \zeta_{i1} = 0 && \forall i \in V \setminus \{1\} \\
& \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

のように記述できる．

次に，$\boldsymbol{y}$ の実行可能領域の表現に GG モデルを使用した DS モデルを説明する．$\boldsymbol{\alpha}$ と $\boldsymbol{\beta}$ の他に GG モデルの制約 (9) に対応する双対変数 $\boldsymbol{\tau}$，制約 (10) と (11) に対応する双対変数 $\boldsymbol{\gamma}$ を定義すると，モデル $D(\cdot, \mathrm{GG})$ は

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{(i,j)\in E} d^{+}_{ij} x_{ij} - \sum_{i\in V} (\alpha_i + \beta_i - \gamma_i) - n\gamma_1 \\
\text{s.t.} \quad & \alpha_j + \beta_i + (n-1)\tau_{ij} \le d^{\sigma(x)}_{ij} && \forall (i,j) \in E \\
& -\tau_{ij} + \gamma_i - \gamma_j \le 0 && \forall (i,j) \in E \\
& \gamma_i \ge 0 && \forall i \in V \\
& \tau_{ij} \ge 0 && \forall (i,j) \in E \\
& \boldsymbol{x} \in X
\end{aligned}
$$

のように記述できる．

4.3 反復双対置換法

DS 法は最大リグレット最小化一般化割当問題に対して近似保証がないことが証明されている [7]．そのため，最大リグレット最小化 0-1 整数計画問題に対して DS 法で得られる解を改善する反復双対置換法 (iterated dual substitution method, iDS 法) が提案された [8]．しかし，TSP が 0-1 整数計画問題として表現することが難しいため（DFJ モデルが 0-1 整数計画モデルであるが，制約の数が $\mathcal{O}(2^n)$ である），MMR-TSP への DS 法と iDS 法の適用はまだ試されていない．

iDS 法ではこれまでの探索で得られた実行可能解を探索空間（iDS 法の次の反復で対象とする問題の実行可能領域）から排除する制約条件を追加することによって DS 法を反復的に利用することができる．これまで得られた実行可能解集合を $\hat{X}$ とし，新たな反復で $\hat{X}$ に含まれる解を排除するために，DS モデルに追加する制約を 2 種類説明する．

ハミング距離制約は，既知の解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ からハミング距離 r 離れることを意味する制約である:

$$
\sum_{\substack{(i,j)\in E: \\ \hat{x}_{ij}=0}} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j)\in E: \\ \hat{x}_{ij}=1}} (1 - x_{ij}) \ge r \quad \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{X}.
$$

実行可能巡回路の性質を利用すると

$$
\sum_{\substack{(i,j)\in E: \\ \hat{x}_{ij}=0}} x_{ij} \ge \frac{r}{2} \qquad \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{X} \tag{18}
$$

と書き換えられる．$0 < r \le 4$ のときは対象となる既知の解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ のみを除く制約となる．

最良シナリオ制約は最良シナリオ補題を利用する制約である．最良シナリオとは，解 $\boldsymbol{x}$ にとって最も都合の良いシナリオを指し，その 1 つは

$$
d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} = \begin{cases} d^{-}_{ij} & \text{if } x_{ij} = 1 \\ d^{+}_{ij} & \text{otherwise} \end{cases} \quad \forall (i,j) \in E, \tag{19}
$$

すなわち

$$
d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} = (d^{-}_{ij} - d^{+}_{ij}) x_{ij} + d^{+}_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \tag{20}
$$

と定義できる．最良シナリオ $\boldsymbol{d}^{\phi(\boldsymbol{x})}$ には以下の性質があることが知られている．

補題 2 ([8])**.** 解 $\boldsymbol{x}$ と解 $\boldsymbol{y}$ において，

$$
\sum_{(i,j)\in E} d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} x_{ij} \ge \sum_{(i,j)\in E} d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} y_{ij} \tag{21}
$$

であるとき，$r_{\max}(\boldsymbol{x}) \ge r_{\max}(\boldsymbol{y})$ が成り立つ．

補題 2 は解 $\boldsymbol{x}$ にとって最も都合の良いシナリオの下でも自身よりも巡回路の長さが短い解 $\boldsymbol{y}$ が存在する場合，$\boldsymbol{x}$ は MMR-TSP においても $\boldsymbol{y}$ に支配されることを意味する．補題 2 により，既知の解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ と比較して最大リグレットが小さくなる見込みのない解を排除することを

$$
\sum_{(i,j)\in E} d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} x_{ij} < \sum_{(i,j)\in E} d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} \hat{x}_{ij} \quad \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{X} \tag{22}
$$

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

のように表現できる．不等式 (22) の $\boldsymbol{d}^{\phi(\hat{\boldsymbol{x}})}$ に (20) を代入してまとめると，最良シナリオ制約は

$$\sum_{\substack{(i,j)\in E:\\ \hat{x}_{ij}=1}} d^{+}_{ij}x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j)\in E:\\ \hat{x}_{ij}=0}} d^{-}_{ij}x_{ij} < \sum_{\substack{(i,j)\in E:\\ \hat{x}_{ij}=1}} d^{+}_{ij} \quad \forall\hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{X} \quad (23)$$

となる．最良シナリオ制約 (23) はハミング距離制約 (18) の $0 < r \leq 4$ の場合に優越する．

5　枝生成法

MMR-TSP では，Benders-like 分解法や分枝カット法などの厳密解法はノード数 n の大きな問題例に対して最適解を得られにくくなる．多くの現場の意思決定者は効果的な発見的解法に関心を寄せているが，MMR-TSP に関しては従来の TSP の発見的解法は有効でないことが示されている [1]．本節では MMR-TSP のための新たな発見的解法を提案する．

本研究で提案する枝生成法（edge genaration algorithm, EGA）は，MMR-TSP に対して良い巡回路を含むようにグラフの縮小を考える．具体的には，ノード集合 V を変更せず，枝集合 E の部分集合 $\tilde{E}$ $(\subseteq E)$ を考え，その $\tilde{E}$ について厳密に MMR-TSP を解くことで早い段階で良解を求めるアルゴリズムである．

EGA の擬似コードを Algorithm 1 に示す．アル

Algorithm 1 枝生成法

1: 解 $\check{\boldsymbol{x}}$ を構築し，暫定解 $\boldsymbol{x}^*$ とする: $\boldsymbol{x}^* \leftarrow \check{\boldsymbol{x}}$.
2: $\tilde{E} \leftarrow E(\check{\boldsymbol{x}})$.
3: **while** $|\tilde{E}| < |E|$ **do**
4: 　$|E(\check{\boldsymbol{x}}) \cap \tilde{E}| < n$ を満たす解 $\check{\boldsymbol{x}}$ を構築する．
5: 　**if** $r_{\max}(\boldsymbol{x}^*) > r_{\max}(\check{\boldsymbol{x}})$ **then**
6: 　　$\boldsymbol{x}^* \leftarrow \check{\boldsymbol{x}}$.
7: 　**end if**
8: 　$\tilde{E} \leftarrow \tilde{E} \cup E(\check{\boldsymbol{x}})$.
9: 　$\tilde{E}$ に限定した MMR-TSP を厳密にとき，得られた最適解を $\tilde{\boldsymbol{x}}$ とする．
10: 　**if** $r_{\max}(\boldsymbol{x}^*) > r_{\max}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ **then**
11: 　　$\boldsymbol{x}^* \leftarrow \tilde{\boldsymbol{x}}$.
12: 　**end if**
13: **end while**
14: **return** $\boldsymbol{x}^*$.

ゴリズムの最初に実行可能解 $\check{\boldsymbol{x}}$ を生成し，暫定解 $\boldsymbol{x}^*$ とする．$\check{\boldsymbol{x}}$ に含まれる枝の集合を $E(\check{\boldsymbol{x}})$ と定義し，$E(\check{\boldsymbol{x}})$ に含まれる枝のみで構成される枝集合を $\tilde{E}$ とする．Step 3–13 では反復的に枝を追加しながら MMR-TSP の部分問題を厳密に解く．Step 4 では $\tilde{E}$ に含まれていない枝を 1 本以上含むような新たな実行可能解 $\check{\boldsymbol{x}}$ を生成し，解の評価を行う．そして，$\check{\boldsymbol{x}}$ で新たに生成された枝のすべてを $\tilde{E}$ に追加する．Step 9 で縮小されたグラフ $G = (V, \tilde{E})$ の下で MMR-TSP を厳密に解く．そのようにして求められた解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ の評価を行い，Step 4 に戻って再び $\tilde{E}$ の拡張を行う．ただし，各解の評価は元のグラフ $G = (V, E)$ で行う．

Step 1 と Step 4 で $\check{\boldsymbol{x}}$ を求める際には 4 節で説明したシナリオ固定法や DS 法のような比較的実行時間の短い発見的解法を用いることができる．ただし，Step 4 において $\check{\boldsymbol{x}}$ を求める問題に

$$\sum_{(i,j)\in E\setminus\tilde{E}} x_{ij} \geq 1 \quad (24)$$

という制約を追加する必要がある．シナリオ固定法を用いる場合は，制約 (24) によって各反復で異なる解を得られることが保証されているため，各反復で同じシナリオを利用しても，シナリオを変化させても構わない．最良シナリオ補題（補題 2）より，MMR-TSP の最適解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}}$ が最良シナリオ $\boldsymbol{d}^{\phi(\boldsymbol{x}_{\mathrm{opt}})}$ の最適解でもあるため，理論上すべてのなりうる最良シナリオ (19) に対し，シナリオ固定法を適用することで，MMR-TSP の最適解を得ることができる．任意の最良シナリオ (19) においては，$|E|$ の $1/(n-1)$ のみの枝コストが d^{-}_{ij} となることにより，枝生成法で各反復に同じシナリオを利用する場合は，$\boldsymbol{d}^{-}$ より $\boldsymbol{d}^{+}$ の方が良い解の生成が期待できる．また，$\boldsymbol{d}^{-}$ と $\boldsymbol{d}^{+}$ に関して以下の補題を示す．

補題 3. シナリオ $\boldsymbol{d}^{-}$ と $\boldsymbol{d}^{+}$ における 2 つの TSP に対して同じ最適解 $\boldsymbol{x}_{\mathrm{appr}}$ が存在するとき，$r_{\max}(\boldsymbol{x}_{\mathrm{appr}})$ は MMR-TSP の最適値の 2 倍に抑えられる．

補題 3 の結果と合わせて，本研究で Step 1 と Step 4 の $\check{\boldsymbol{x}}$ をシナリオ固定法で求める場合は，シナリオ

$$\check{d}_{ij} = \left(\sum_{(i',j')\in E} d^{+}_{i'j'}\right) \cdot d^{+}_{ij} + d^{-}_{ij} \quad \forall(i,j) \in E$$

を利用する．シナリオ $\check{\boldsymbol{d}}$ で得られた TSP の最適解は，$\boldsymbol{d}^{+}$ のときの最適解であり，補題 3 の $\boldsymbol{x}_{\mathrm{appr}}$ が存在する場合には 2 近似の保証がある．

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

Step 9 で $\tilde{E}$ に基づく縮小グラフにおける MMR-TSP は，各枝 $(i,j) \in E \setminus \tilde{E}$ に対する制約 $x_{ij} = 0$ をモデル (15)–(17) に追加することで記述できる．最適解 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ を厳密に求める際には，3 節で説明した 2 つの厳密解法である Benders-like 分解法，分枝カット法のどちらも使うことができる．

EGA については以下のような性質が言える．

補題 4. EGA は最大 $n^2 - 2n - 1$ 回の反復で終了し，得られる解 $\boldsymbol{x}^*$ は MMR-TSP の最適解である．

EGA 内で古典的な TSP を解く機会（たとえば $\hat{\boldsymbol{x}}$，$\tilde{\boldsymbol{x}}$ を求めるときや $\tilde{\boldsymbol{x}}$ を評価するとき）が複数ある．そのときに DFJ モデル (1)–(5) を用いる場合には部分巡回路排除制約 (5) を順次追加していくことで効果的に働くことを 2.1 節で説明したが，一度他の TSP で加えた排除制約はその後の TSP を解く際にあらかじめ加えておくことによって高速化を図ることができる．

6 計算実験

6.1 計算環境と問題例

計算環境は CPU 4.00 GHz Xeon E-2286G，メモリ 64 GB である．混合整数計画モデルを解く際に Gurobi 9.5.0 を使用した．DFJ モデルを解くときに部分巡回路の追加について Gurobi の Lazy Constraints 機能を利用した．

本研究で用いる問題例について，Montemanni ら [1] が生成した問題例セット[1]を小規模問題例セットと呼ぶ．小規模問題例セットにはノード数 n が 80 以下の問題例が 330 個含まれる．また，同じ生成方法で，ノード数 $n \in \{100, 200, \ldots, 1000\}$ の各 n に対して 10 個の乱数問題例を生成した．これらの 100 個の問題例を大規模問題例セットと呼ぶ．

6.2 無向グラフとの対応付け

本研究では一般性のある有向グラフを対象として扱ってきたが，比較対象とする先行研究 [1] が無向グラフとして扱っていたため無向グラフとの対応付けを行う．まず $d^+_{ij} = d^+_{ji}$，$d^-_{ij} = d^-_{ji}$ とし，最悪シナリオ (12) について，枝 (i,j) または枝 (j,i) が巡回路 $\boldsymbol{x}$ に採用される場合は，枝 (i,j) と (j,i) のコストを共に d^+_{ij} とすることで無向グラフの最悪シナリオに対応づける．解 $\boldsymbol{x}$ の線形な組合せで以下のようにできる:

$$d^{\sigma(\boldsymbol{x})}_{ij} = (d^+_{ij} - d^-_{ij})(x_{ij} + x_{ji}) + d^-_{ij} \quad \forall (i,j) \in E.$$

また，iDS 法でハミング距離制約 (18) については 1 度の反復で得られた巡回路に基づく制約とその巡回路の逆方向の制約を 2 つ追加することで無向グラフと対応付けることができる．最良シナリオ制約については，最悪シナリオと同様に枝 (i,j) または枝 (j,i) が巡回路 $\boldsymbol{x}$ に採用される場合は，枝 (i,j) と (j,i) のコストを共に d^-_{ij} とすることで無向グラフの最良シナリオに対応づけると

$$d^{\phi(\boldsymbol{x})}_{ij} = (d^-_{ij} - d^+_{ij})(x_{ij} + x_{ji}) + d^+_{ij} \quad \forall (i,j) \in E$$

と書くことができる．これを iDS 法に使用する制約 (22) に代入すると，以下のように整理できる:

$$\sum_{(i,j)\in E} d^-_{ij} x_{ij} + \sum_{\substack{(i,j)\in E: \\ \hat{x}_{ij}=1}} (d^+_{ij} - d^-_{ij})(x_{ij} + x_{ji}) < \sum_{\substack{(i,j)\in E: \\ \hat{x}_{ij}=1}} d^+_{ij} \qquad \forall \hat{\boldsymbol{x}} \in \hat{X}.$$

6.3 予備実験

不確かさのない TSP において，TSP の乱数問題例に対して 2.1 節で紹介した 3 つの MIP モデルを用いて計算実験を行った．その結果 DFJ モデルが最も早く最適解に到達する傾向があることから，Benders-like 分解法と分枝カット法に関わる $P(X')$ と各アルゴリズムに関わる TSP を解く場合は X の表現に DFJ モデルを使用した．

DS 法において 4.2 節にて説明した 6 種類の DS モデルをそれぞれ実装し，一部の小規模問題例で実験を行ったところ，解を求める速度，解の精度（評価値 $r_{\max}$ の大きさ）の両方でモデル $D(\mathrm{DFJ}, \mathrm{MTZ})$ が最も優れていることが確認できた．

iDS 法における 2 つの制約である（$r = 1$ の場合の）ハミング距離制約 (18) と最良シナリオ制約 (23) についてもすべての小規模問題例で実験を行ったところ，他の最大リグレット最小化組合せ問題と異なり [8]，ハミング距離制約による反復の方が最良シナリオ制約を利用した場合と比較して顕著に良い結果を得られた．

以上から，iDS 法の実装にモデル $D(\mathrm{DFJ}, \mathrm{MTZ})$ とハミング距離制約の採用を決定した．

[1] `http://www.idsia.ch/~roberto/MMR-TSPinst.zip`

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

6.4 実験結果

小規模問題例と大規模問題例に対する計算結果について示す．各問題例にそれぞれのアルゴリズムを時間制限を 3600 秒として実行した．

小規模問題例に対して Montemanni ら [1] が提案したすべてのアルゴリズムで得られた最も良い結果と本研究で実装した 5 つのアルゴリズム: 分枝カット法（BC），Benders-like 分解法（BD），iDS 法（iDS），DS 法に基づく EGA（EGA-DS），シナリオ固定法に基づく EGA（EGA-fix）で得られた結果を表 1 に示す．各手法においては，制限時間内に得られる最良解までにかかった時間秒数（ttb），とその最良解の質を表す gap を示す．gap は最良解 $\boldsymbol{x}$ の評価値 $r_{\max}(\boldsymbol{x})$ と最も良い下界 LB により，

$$100 \cdot \frac{r_{\max}(\boldsymbol{x}) - LB}{LB}\%$$

のように計算される．各行に 10 個の乱数問題例に対する平均値を示し，10 個の問題例に対してすべての最適解が得られたとき gap に「–」，そうでないとき ttb に「–」と表す．先行研究 [1] に示した計算結果も 3600 秒制限で得られた結果であるが，使用した PC などの計算環境が異なるため，gap のみを示す．

Montemanni らの結果 [1] では，$n < 40$ の問題例に対して最適解をすべて求められたが，$n \geq 40$ のとき 17 種類中の 8 種類に対して最適解を得られなかった問題例がある．iDS は多くの最大リグレット最小化組合せ問題に対して BD と BC より良い性能が確認された [8] が，MMR-TSP に対しては比較的悪い結果を示す傾向があることを確認できた．EGA は，先行研究 [1] の結果，BD，iDS と比較して良い結果を得たが，EGA-fix の方が顕著に良い結果を示していることがわかる．

BC と EGA-fix はすべての小規模問題例で制限時間内に最適解を求めることができたが，EGA-fix の方がより早く最適解に到達している傾向がある．

小規模問題例に対して優れた結果を得た BC と EGA-fix を対象として大規模問題例に対する計算実験を行った．その結果を表 2 に示す．すべての表記は表 1 と同じであるが，厳密に解けなかった問題例が多いため，ttb をすべて記載する．また，ノード数 $n = 1000$ の問題例に対しては BC は制限時間内に実行可能解すら発見できない問題例があったため，計算不可となった gap と ttb のセルを「/」と示す．

大規模問題例に対して BC と比較しても明らかに EGA-fix の方が実行時間も解の質も共に良い性能を示していることがわかる．BC は n の増加に伴い gap が大きくなり，$n = 900$ のときに gap が 100% 以上の信頼できない結果となり，$n = 1000$ のときは制限時間内に実行可能解を得られなかった問題例もあった．提案手法 EGA-fix はすべての n に対して gap が 6% 以下の信頼できる良解を得ることができた．発見的解法としては問題例のサイズに関わらず EGA-fix が優れていることがわかる．

7 おわりに

本研究では最大リグレット最小化巡回セールスマン問題 (MMR-TSP) を対象として，Benders-like 分解法と分枝カット法を紹介した．その後，最大リグレット最小化組合せ最適化問題に有効と思われる反復双対置換法を MMR-TSP に適用した．その際に，巡回セールスマン問題に対する 3 種類の混合整数計画モデルのもとに，MMR-TSP に対して 12 種類の反復双対置換法の実装を試した．そして，実世界の大規模問題に向けた新たな発見的解法である枝生成法を提案した．計算実験ではすべての問題例に対して既存研究の結果や他の手法と比較して素晴らしい結果を得ることができ，ノード数 1000 の問題例に対しても平均 gap が 3% 以下の解を得ることができた．

参考文献

[1] Roberto Montemanni, János Barta, Monaldo Mastrolilli, and Luca Maria Gambardella. The robust traveling salesman problem with interval data. *Transportation Science*, Vol. 41, No. 3, pp. 366–381, 2007.

[2] George Dantzig, Ray Fulkerson, and Selmer Johnson. Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the operations research society of America*, Vol. 2, No. 4, pp. 393–410, 1954.

[3] Clair E Miller, Albert W Tucker, and Richard A Zemlin. Integer programming

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.

表 1: 小規模問題例に対する実験結果

問題例	n	[1] gap	BC ttb	BC gap	BD ttb	BD gap	iDS ttb	iDS gap	EGA-DS ttb	EGA-DS gap	EGA-fix ttb	EGA-fix gap
R-10-100	10	–	0.0	–	0.0	–	0.2	–	0.1	–	0.0	–
R-10-1000	10	–	0.0	–	0.0	–	0.3	–	0.1	–	0.0	–
R-20-100	20	–	0.1	–	0.3	–	0.8	–	0.6	–	0.1	–
R-20-1000	20	–	0.1	–	0.2	–	0.5	–	0.2	–	0.1	–
R-30-10	30	–	0.6	–	0.2	–	0.3	–	0.1	–	0.1	–
R-30-100	30	–	0.3	–	1.4	–	2.5	–	1.1	–	0.2	–
R-30-1000	30	–	0.4	–	1.9	–	3.6	–	2.6	–	0.1	–
R-30-10000	30	–	0.3	–	0.9	–	4.2	–	3.1	–	0.1	–
R-40-100	40	–	2.9	–	8.8	–	301.8	–	21.1	–	0.5	–
R-40-1000	40	–	0.9	–	8.9	–	40.1	–	19.8	–	0.7	–
R-50-100	50	1.81	40.1	–	–	0.049	7.9	–	4.2	–	0.2	–
R-50-1000	50	–	3.7	–	13.8	–	18.6	–	14.8	–	0.4	–
R-60-100	60	3.16	25.1	–	217.9	–	268.8	–	38.5	–	3.0	–
R-60-1000	60	0.69	8.1	–	54.4	–	13.9	–	9.8	–	1.0	–
R-80-1000	80	0.80	119.9	–	442.6	–	–	0.027	62.2	–	15.8	–
brazil58-0.25	58	–	17.2	–	47.2	–	–	1.751	144.1	–	4.1	–
brazil58-0.50	58	3.03	120.8	–	–	0.003	–	1.305	–	0.156	72.6	–
dantzig42-0.25	42	–	1.1	–	1.7	–	–	0.888	4.8	–	0.6	–
dantzig42-0.50	42	–	5.0	–	26.7	–	–	0.287	33.2	–	3.3	–
fri26-0.25	26	–	0.2	–	0.1	–	4.9	–	1.1	–	0.1	–
fri26-0.50	26	–	0.5	–	0.9	–	11.6	–	1.7	–	0.1	–
gr17-0.25	17	–	0.1	–	0.1	–	0.3	–	0.3	–	0.1	–
gr17-0.50	17	–	0.1	–	0.6	–	1.2	–	0.8	–	0.1	–
gr21-0.25	21	–	0.0	–	0.0	–	0.3	–	0.1	–	0.0	–
gr21-0.50	21	–	0.1	–	0.0	–	1.1	–	0.3	–	0.0	–
gr24-0.25	24	–	0.1	–	0.2	–	1.1	–	0.8	–	0.0	–
gr24-0.50	24	–	0.4	–	0.4	–	23.6	–	0.9	–	0.0	–
gr48-0.25	48	–	6.0	–	16.9	–	–	1.645	117.6	–	2.4	–
gr48-0.50	48	8.28	50.8	–	–	0.288	–	1.047	–	0.154	14.0	–
hk48-0.25	48	–	2.2	–	4.6	–	–	0.068	24.5	–	0.6	–
hk48-0.50	48	3.37	46.9	–	–	0.086	–	0.108	334.2	–	2.4	–
swiss42-0.25	42	–	0.9	–	0.4	–	76.3	–	1.9	–	0.1	–
swiss42-0.50	42	0.24	8.1	–	38.3	–	–	0.130	48.5	–	0.9	–
平均		0.648	14.0	–	–	0.012	–	0.190	–	0.009	3.7	–

表 2: 大規模問題例に対する実験結果

問題例	n	BC ttb	BC gap	EGA-fix ttb	EGA-fix gap
R-100-1000	100	80.4	–	2.6	–
R-200-1000	200	2469.2	3.0	58.1	2.1
R-300-1000	300	2543.9	7.6	276.4	4.6
R-400-1000	400	2854.2	10.0	412.2	5.3
R-500-1000	500	1814.9	15.4	576.5	5.6
R-600-1000	600	2581.3	28.5	257.3	5.2
R-700-1000	700	2624.4	61.6	793.5	4.3
R-800-1000	800	2682.3	64.7	434.9	4.4
R-900-1000	900	2068.4	124.9	921.8	3.6
R-1000-1000	1000	/	/	88.7	2.7

formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, Vol. 7, No. 4, pp. 326–329, 1960.

[4] Bezalel Gavish and Stephen C Graves. The travelling salesman problem and related problems. 1978.

[5] Hande Yaman, Oya Ekin Karaşan, and Mustafa Ç Pınar. The robust spanning tree problem with interval data. *Operations research letters*, Vol. 29, No. 1, pp. 31–40, 2001.

[6] Adam Kasperski and Paweł Zieliński. An approximation algorithm for interval data min-max regret combinatorial optimization problems. *Information Processing Letters*, Vol. 97, No. 5, pp. 177–180, 2006.

[7] Wei Wu, Manuel Iori, Silvano Martello, and Mutsunori Yagiura. Exact and heuristic algorithms for the interval min-max regret generalized assignment problem. *Computers & Industrial Engineering*, Vol. 125, pp. 98–110, 2018.

[8] Wei Wu, Manuel Iori, Silvano Martello, and Mutsunori Yagiura. An iterated dual substitution approach for binary integer programming problems under the min-max regret criterion. *INFORMS Journal on Computing*, 2022. ahead of print.

Copyright © 2022 by
The Institute of Electronics, Information and Communication Engineers and
Information Processing Society of Japan All rights reserved.