

接触回数と 3 つのノード中心性の相関関係に関する研究

On the Correlation between the Number of Contacts and Three Centralities of Nodes

鈴木 一優*

千葉 英史†

1 はじめに

covid-19 やインフルエンザなどの感染症は迅速に終息することが望ましい。そのためには、感染源からの経路の遮断が最も重要であることが知られている [1]。感染経路を遮断するためには、感染源が感染させる回数を予測し、対策をとることで蔓延を防止することができる。また、感染症の終息を予測するためには、ネットワークモデルの構造的指標の観察のみでは不十分であると言われている [2]。さらに、影響力のある感染者について分析をするために、ノード中心性を用いた研究が数多く行われている。本研究では、感染源の特徴を明らかにすることを目的として、感染させる回数と各種ノード中心性との関係に関して研究する。感染症の伝播現象は、ネットワークモデル上の数理モデルを用いて表すことができる。このようなモデルをコンタクトプロセスと呼ぶ。これは、ネットワークモデル上のノードが非感染状態と感染状態の 2 つの状態を取り、確率的に非感染状態と感染状態を繰り返す数理モデルである。

コンタクトプロセスを用いた先行研究として、コンタクトプロセスの感染確率を隣接行列の要素を含めて表し、感染率の臨界値の下限を示した [3]。

本研究では、感染源から感染させることを接触と呼び、感染経路と回復・隔離状態を考慮したコンタクトプロセスを用いる。シミュレーションを通して、感染症をネットワークモデル上に蔓延させることで接触回数を得る。そして、接触回数に対して、それぞれノードの次数中心性、媒介中心性、固有ベクトル中心性との相関について考察する。

2 コンタクトプロセス

本研究では、文献 [3] で紹介された感染経路とノードに関する 3 つの状態を考慮したコンタクトプロセスを扱う。ノードの状態について、非感染状態から感染状態となり、感染状態から回復・隔離状態となる。回復・隔離状態となったノードは、再び感染状態にならないことを前提としている。

λ は感染率を表す範囲 $[0, 1]$ の比例定数、 μ は治癒率を表す範囲 $[0, 1]$ の比例定数、 a_{ij} は隣接行列の要素、 dt は微小時間である。また、各状態に対するノードの集合を考えるために、非感染状態ノードの集合を S 、感染状態ノードの集合を I 、回復・隔離状態ノードの集合を R とする。このとき、時刻 t に

おけるノード i の状態変数 $x_i(t)$ は、

$$x_i(t) = \begin{cases} 0 & (i \in S) \\ 1 & (i \in I) \\ 2 & (i \in R) \end{cases}$$

となる。

また、微小時間の取り方について、ネットワークモデルの最大次数 k_{\max} の逆数とすることで

$$\begin{aligned} \sum_{j \in I} \lambda a_{ij} x_j(t) dt &= \sum_{j \in I} \lambda a_{ij} x_j(t) \frac{1}{k_{\max}} \\ &\leq \lambda k_{\max} \frac{1}{k_{\max}} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

となることを利用して、以下の手順で計算を行う。

- (1) $t = 0$ として、全てのノードの状態を決める。ただし、 $|I| \neq 0$ とする。
- (2) $|I| = 0$ になるまで、以下の処理を繰り返す。
 - (2.1) ノード i をランダムに 1 つ選ぶ。
 - (2.2.1) $i \in S$ であれば、 $\sum_{j \in I} \lambda a_{ij} x_j(t) dt$ の確率で $I := I \cup \{i\}$, $S := S \setminus \{i\}$ とする。
 - (2.2.2) $i \in I$ であれば、 μdt の確率で $R := R \cup \{i\}$, $I := I \setminus \{i\}$ とする。
 - (2.3) $t := t + dt$ とする。

シミュレーションをする際は、現在の時刻 t におけるノード i の状態変数 $x_i(t)$ と次の時刻 $t + dt$ におけるノード i の状態変数 $x_i(t + dt)$ を記憶しておけばよい。

3 接触回数

感染経路を遮断するために、個々のノードの感染させる回数に着目する必要があると考える。この回数について分析することを目的として、接触回数を導入する。これは、ノードが感染状態であるとき、隣接ノードを感染させる回数を表している。第 2 章で紹介したコンタクトプロセスの Step(2.2.1) において、感染源となるノードは一意に決まるため、接触回数を求めることができる。

4 シミュレーション

本研究では、感染率 λ を 0.05 から 1.0 までの範囲で 0.05 刻みに設定し、治癒率 μ は 1 として、 $t = 0$ のときに、ランダムに 10 個のノードを感染状態にする。各感染率において、

* 法政大学大学院理工学研究科システム理工学専攻

† 法政大学理工学部経営システム工学科

シミュレーションを 100 回行い、フィッシャー変換を用いて、接触回数と各ノード中心性の相関係数の平均値を求めた。シミュレーションの対象とするネットワークモデルには、ランダムグラフ (以下、図中の記号 +), WS モデル (Δ), KE モデル (\square), HK モデル (\blacklozenge), CNN モデル (\times), FCR モデル (\circ) の 6 つのモデルを用いる。各ネットワークモデルに対して、ノード数 N , 平均次数 $\langle k \rangle$, 最大次数 k_{\max} を表 1 に示す。

横軸を感染率、縦軸を相関係数の平均値として、感染率を変化させたときの接触回数と次数中心性、媒介中心性、固有ベクトル中心性との相関係数の平均値の関係をそれぞれ図 1, 図 2, 図 3 に示す。また、感染率 $\lambda = 0.95$ のときの HK モデル上でのシミュレーションにおいて、ある 1 回の試行で得られた接触回数と次数中心性の散布図を図 4 に示す。このときの相関係数は 0.827 となった。

得られた相関係数について、有意水準 1% で検定を行ったところ、WS モデルの接触回数と各ノード中心性、ランダムグラフの接触回数と媒介中心性、 $\lambda = 0.05, 0.1, 0.15$ のときのランダムグラフの接触回数と次数および固有ベクトル中心性、 $\lambda = 0.05$ のときの HK モデルの接触回数と固有ベクトル中心性において、相関がないことが明らかになった。

KE モデル, HK モデル, CNN モデル, FCR モデルの接触回数は、どの中心性との相関においても正の相関があった。その中でも、KE モデル, CNN モデル, FCR モデルでは、次数中心性 $>$ 固有ベクトル中心性 $>$ 媒介中心性の関係で、HK モデルでは、次数中心性 $>$ 媒介中心性 $>$ 固有ベクトル中心性の関係で相関係数が求められた。ランダムグラフについても同様に正の相関があり、次数中心性 $>$ 固有ベクトル中心性という関係性となった。

また、ネットワークモデルによっては、感染率が低いときに接触回数が観測されないことがあるため、相関係数を求めることができない場合があった。

	N	$\langle k \rangle$	k_{\max}
ランダム	1,000	9.838	23
WS	1,000	10	14
KE	1,000	11.958	140
HK	1,000	11.958	150
CNN	1,000	6.446	70
FCR	1,000	6.67	66

表 1 各ネットワークモデルの指標

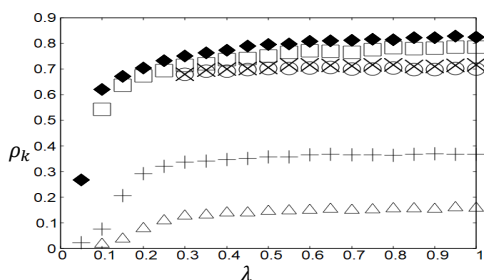


図 1 接触回数と次数中心性の相関係数の平均値 ρ_k の関係

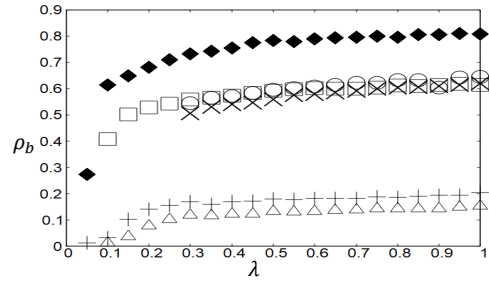


図 2 接触回数と媒介中心性の相関係数の平均値 ρ_b の関係

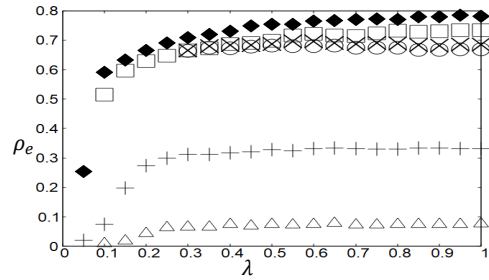


図 3 接触回数と固有ベクトル中心性の相関係数の平均値 ρ_e の関係

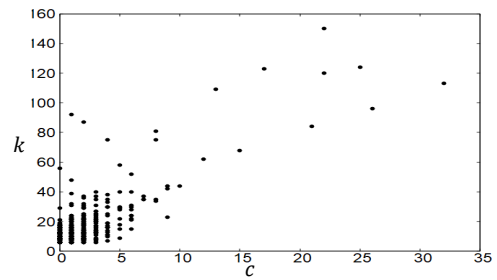


図 4 接触回数 c と次数中心性 k の散布図

5 今後の課題

本研究では、感染経路と回復・隔離状態を考慮したコンタクトプロセスを用いて、接触回数を求め、3つのノード中心性との相関係数を求めた。その結果、接触回数と各ノード中心性には正の相関があり、そのノード中心性ごとの関係性の強さが明らかになった。

今後の課題として、接触回数に対する理論的解析やその他の性質について調査することが挙げられる。

参考文献

- [1] 茨城県保健予防課健康危機管理対策室, 保育施設における感染症対応マニュアル (第 2 版), <https://www.pref.ibaraki.jp/hokenfukushi/eiken/idwr/other/hoiku2017.html> (アクセス日 2022 年 6 月 9 日)
- [2] P.H.T. Schimit, F.H. Pereira, "Disease spreading in complex networks: A numerical study with Principal Component Analysis", Expert Systems with Applications, vol.97, pp.41-50, 2018.
- [3] 一宮 尚志, 複雑ネットワーク上のコンタクトプロセス, 数理解析研究所講究録, 第 1616 巻, pp.103-111, 2008.