A-003

3 連結 cubic 平面グラフの最少線分格子凸描画
Minimum-Segment Convex Grid Drawings of 3-Connected Cubic Plane Graphs

三浦 一之*
Kazuyuki Miura

概 要

平面グラフ G の凸描画においては，全ての辺は交差しない直線分で描かれ，全ての面は凸多角形で描かれる．G の凸描画で，各点が整数座標を持つものを格子凸描画という．G の凸描画で，極大線分の数が最少となるものを最少線分凸描画という．G の最少線分凸描画で，各頂点が整数格子上にあるものを最少線分格子凸描画という．G が 3 連結 cubic グラフならば，G は最小線分凸描画を持つことが知られている．更に，G が 3 連結 cubic グラフならば，G は大きさ $(n/2+1)\times(n/2+1)$ の整数格子内に，極大線分の数が下限より高々1 本多い格子凸描画を持つことが知られている．ここで，n は G の点数を表す．

本論文では，G が 3 連結 cubic グラフならば，G は大きさ $(3n/2+1)\times(5n/2+1)$ の整数格子内に最少線分格子凸描画できることを証明するとともに，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．

1 序論

近年，様々な分野で与えられたグラフ，特に平面グラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]．図 1(a) のように，平面グラフ G の描画で，G の各辺が交差の無い直線分として描かれたものを**直線描画**という．G の直線描画で，G の各点が整数座標を持つものを**格子描画**という．なお，本論文ではグラフ G の点数を n で表す．また，大きさ $W\times H$ の**整数格子**は $W+1$ 本の垂直線分と $H+1$ 本の水平線分およびそれらの交点からなり，その外周は矩形であるとする．W は整数格子の**幅**，H は**高さ**という．整数格子の幅を W，高さを H とする．格子サイズは $W\times H$ と表す．

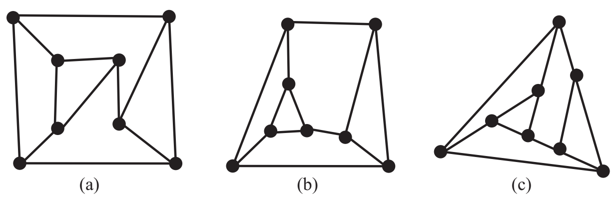

図 1: (a) 平面グラフ G の直線描画，(b) G の凸描画，(c) G の最少線分凸描画.

図 1(b) のように，平面グラフ G の直線描画で，全ての面が凸多角形であるものを**凸描画**という．全ての平面グラフが凸描画を持つとは限らないが，全ての 3 連結平面グラフは凸描画を持つ [8]．G の凸描画で，しかも格子描画であるものを G の**格子凸描画**という．任意の 3 連結平面グラフは $(n-2)\times(n-2)$ の大きさの整数格子に線形時間で格子凸描画できることが知られている [3]．近年，凸描画および格子凸描画に更なる制約を加えたより見やすい描画法の研究が行われている [5]．本論文では，その中の一つである**最少線分格子凸描画**を扱う．

Γ を G の直線描画とする．Γ において，点 v に接続する連続した 2 辺がなす角を θ_v と書く．$\theta_v=180^\circ$ ならば，θ_v を**平角**という．Γ における辺集合 S が，Γ において直線分となる極大な集合であるならば，S を**極大線分**という．図 1(c) のように，G の凸描画で，極大線分の数が最少となるものを G の**最少線分凸描画**という．最少線分凸描画は，単なる凸描画よりも見やすい場合が多い [5]．図 2(a) のように，全ての頂点の次数が 3 となるグラフを **cubic グラフ**という．G が 3 連結 cubic グラフならば，G は最小線分凸描画を持つことが知られている [5]．G の最少線分凸描画で，しかも格子描画であるものを G の**最少線分格子凸描画**という．

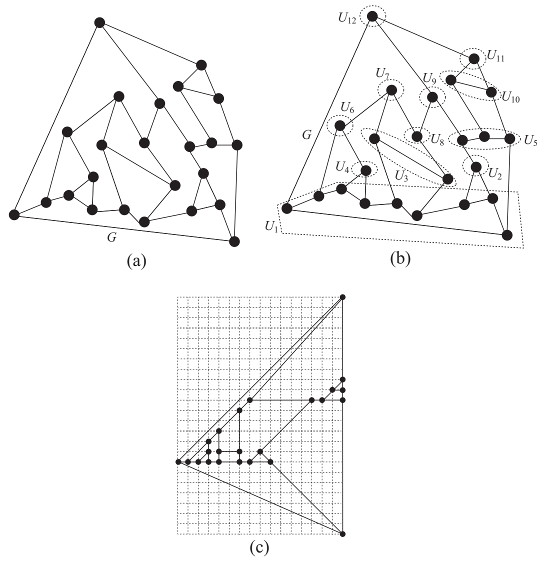

図 2: (a) 3 連結 cubic グラフ G，(b) G の正規分割 Π，(c) G の最少線分格子凸描画.

G が 3 連結 cubic グラフならば，G は大きさ $(n/2+1)\times(n/2+1)$ の整数格子内に，極大線分の数が下限より高々1 本多い格子凸描画を持つことが知られている [5]．しかし，n の多項式の大きさの格子内に最小線分格子凸描画できるかどうかは知られていない．

本論文では，G が 3 連結 cubic グラフならば，G は大きさ $(3n/2+1)\times(5n/2+1)$ の整数格子内に最少線分格子凸描画できることを証明するとともに，そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える．図 2(a) および (c) に本アルゴリズムの入力と出力の例を示す．

*福島大学 理工学群 共生システム理工学類

2 準備

本節では，いくつかの定義と既知の補題を与える．グラフ G は点の集合 V と辺の集合 E からなり，$G=(V,E)$ で表す．辺交差なしに描画できるグラフを**平面グラフ**という．グラフの頂点 v に接続する辺の数を次数といい，$d(v)$ と書く．全ての頂点の次数が 3 となるグラフを **cubic グラフ**という．2 連結平面グラフ G において，点の対 $\{u,v\}$ を G から取り除いた結果，グラフ G が非連結となるならば $\{u,v\}$ を**分離対**という．グラフ G が分離対を持たないならば，2 連結グラフ G は **3 連結**であるという．

$G=(V,E)$ を 3 連結平面グラフとし，$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ であるとする．v_1 と v_2 は $F_o(G)$ 上に連続して表れるとする．Π=$(U_1,U_2,\cdots,U_m)$ を，空ではない部分集合 $U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_m$ からなる V の順序付き分割とする．$1\le k\le m$ なる各 k に対し，$U_1\cup U_2\cup\cdots\cup U_k$ によって誘導される G の部分グラフを G_k とする．また $0\le k\le m-1$ なる各 k に対して，$U_{k+1}\cup U_{k+2}\cup\cdots\cup U_m$ によって誘導される G の部分グラフを $\overline{G_k}$ とする．以下の条件 (a) および (b) が成り立つならば，Π を辺 (v_1,v_2) に関する
G の**正規分割**であるという．

(a) U_1 は (v_1,v_2) を含む内面にあるすべての点から成る．$U_m=\{v_n\}$ かつ，

(b) $2\le k\le m-1$ なる各 k に対して，U_k の全ての点は G_k の外点であり，次の (b1)，(b2) が成り立つ．
(b1) もし $|U_k|=1$ ならば，U_k の点は，G_{k-1} に 2 つ以上の隣接点を持ち，$\overline{G_k}$ に 1 つ以上の隣接点を持つ (図 3(a) 参照)．
(b2) もし $|U_k|\ge 2$ ならば，U_k の点は，G_{k-1} にちょうど 2 つの隣接点を持ち，$\overline{G_k}$ に 1 つ以上の隣接点を持つ (図 3(b) 参照)．

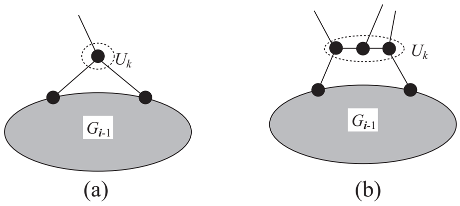

図 3: (a) 正規分割の条件 (b1), (b) 正規分割の条件 (b2)．

図 2(b) に正規分割の例を示す．以下の補題が知られている．

補題 2.1 [3,6] すべての *3* 連結平面グラフ G は正規分割 Π を持ち，Π は線形時間で構成できる．

補題 2.2 [5] G を *3* 連結 *cubic* 平面グラフとし，Γ を G の凸描画とする．このとき，Γ の平角の数は高々$n-3$ であり，極大線分の数は少なくとも $n/2+3$ である．

補題 2.3 [5] G を n 点からなる *3* 連結 *cubic* 平面グラフとする．このとき G は高々$(n/2+1)\times(n/2+1)$ の整数格子内に，極大線分の数が下限より高々*1* 本多い格子凸描画を持つ．更に，$n\ge 6$ ならば，G は最少線分凸描画を持つ．

3 アルゴリズム

本節ではアルゴリズムの概略を述べるとともに，本論文の主定理を与える．

本アルゴリズムは [5] のアルゴリズムを一部改良したものである．まず，[5] のアルゴリズムと同様に，3 連結 cubic グラフ G の正規分割 $\Pi=\{U_1,U_2,\cdots,U_m\}$ を求める．補題 2.2 より，G が最小線分格子凸描画を持つためには，v_1,v_2 および v_n 以外の全ての点がちょうど 1 つの平角を持てばよいことがわかる．ここで，G_1 において，点 v_2 に接続する v_1 ではない点を v_3 とする．[5] のアルゴリズムを用いて描画すると，点 v_3 が平角を持たなくなってしまうことがある．そのため，v_3 が平角を持つようにアルゴリズムを改良する．G_1 にない点で，v_3 に隣接するものを v_a とし，$v_a\in U_c$, $2\le c\le m$, としよう．次の 3 つに場合をわけよう．

(1) G は外周上にちょうど 3 個の点を持つ (図 4(a) 参照)．

(2) G は外周上に 4 個以上の点を持ち，G_{c-1} において，U_c の最も左の隣接点が v_3 である (図 4(b) 参照)．

(3) G は外周上に 4 個以上の点を持ち，G_{c-1} において，U_c の最も右の隣接点が v_3 である (図 4(c) 参照)．

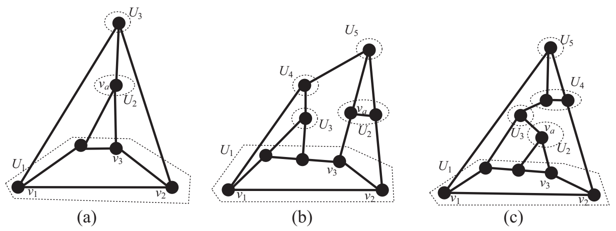

図 4: (a) 場合 1, (b) 場合 2, (c) 場合 3.

場合 1,2 および 3 のいずれの場合においても，点の配置の仕方を工夫することにより，線形時間で最少線分格子凸描画を求めることができることが証明できる．また，場合 1 および場合 2 においては，格子サイズも従来の結果と同じであることが示せる．更に，場合 3 においては，従来の結果と比べて，幅が高々点の数だけ増加し，高さが高々点の数の 2 倍だけ増加することがいえる．詳細については省略する．

次の主定理が成り立つ．

定理 1 G を n 点からなる 3 連結 cubic 平面グラフとする．このとき G は高々$(3n/2+1)\times(5n/2+1)$ の整数格子内に線形時間で最少線分格子凸描画できる．

参考文献

[1] N. Chiba, K. Onoguchi and T. Nishizeki, *Drawing planar graphs nicely*, Acta Inform., 22, pp.187-201 1985.

[2] N. Chiba, T. Yamanouchi and T. Nishizeki, *Linear algorithms for convex drawings of planar graphs*, in Progress in Graph Theory, J.A. Bondy and U.S.R. Murty (eds.), Academic Press, pp.153-173 1984.

[3] M. Chrobak and G. Kant, *Convex grid drawings of 3-connected planar graphs*, International Journal of Computational Geometry and Applications, 7, pp.211-223 1997.

[4] V. Dujmovic, D. Eppstein, M. Suderman and D. R. Wood, *Drawings of planar graphs with few slopes and segments*, Computational Geometry:Theory and Applications, 38(3), pp.194-212, 2007.

[5] D. Mondal, R. I. Nishat, S. Biswas and M. S. Rahman, *Minmum-segment convex drawings of 3-Connected cubic plane graphs*, Journal of Combinatorial Optimization-JCO, pp.1-21, 2011.

[6] T. Nishizeki and Md. S. Rahman, *Planar Graph Drawing*, World Scientific, Singapore 2004.

[7] M. A. H. Samee, M. J. Alam, M. A. Adnan and M. S. Rahman, *Minimum-segment drawings of series-parallel graphs*, In 16th International Symposium on Graph Drawing, LNCS 5417, pp.408-419, 2009.

[8] W. T. Tutte, *How to draw a graph*, Proc. London Math. Soc., 13, pp.743-768 1963.