F-009

ポートフォリオ制御方策に対する構造的正則化

和田 菜々里 †　高野 祐一 ‡
筑波大学 †　筑波大学 ‡

1 はじめに

ポートフォリオ最適化モデルとは，低リスク・高リターンの投資を実現するために金融資産の最適な投資配分を決定する問題である．既存研究によると，過去の資産収益率には期待収益率やボラティリティに関する情報が含まれており，これらを考慮することによって投資成績の向上が期待されることが示されている [1]．そのため，直近の状況に応じて投資比率を動的に決定するための手法の開発が期待されている．

文献 [2] では，動的な意思決定を可能にする方法として，過去数期間の各資産の収益率を入力し，次期の投資比率を出力するポートフォリオ線形制御方策の最適化モデルが提案された．しかし，この手法には，投資先資産数の増加や訓練期間のデータへの過剰適合などの課題が残されている．

本研究では，構造的正則化 [3] を用いて，線形制御方策に対する入力資産の集約と投資資産の選択を実現する手法を提案する．この手法により，投資先資産数を制限しつつ，訓練データへの過剰適合を回避することが可能となる．

2 線形制御方策

文献 [2] で提案された，線形制御方策を用いた動的なポートフォリオ選択問題について説明する．金融資産と投資期間の添字集合をそれぞれ $J, T \subseteq \mathbb{N}$ とし，過去の資産収益率を $\boldsymbol{R} := (r_{jt})_{(j,t)\in J\times T} \in \mathbb{R}^{|J\times T|}$ とする．ここで，ポートフォリオにおける投資比率を表すベクトルを $\boldsymbol{y} := (y_{jt})_{(j,t)\in J\times T} \in \mathbb{R}^{|J\times T|}$ とする．

線形制御方策への入力資産と入力期間の添字集合をそれぞれ $I, K \subseteq \mathbb{N}$ とするとき，各期間 t における資産 j の投資比率を調整するために以下のような線形制御方策を用いる．

$$y_{jt} = b_j + \sum_{k\in K}\sum_{i\in I} w_{ijk} r_{i,t-k}, \quad (j,t) \in J \times (T \setminus K) \tag{1}$$

b_j は資産 j の投資比率の切片，w_{ijk} は資産 i の過去の収益率から資産 j の投資比率への重みを表す．

線形制御方策を最適化するためのモデルの定式化について説明する．目的関数では，コヒレント・リスク指標 $\rho(-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y}))$ の最小化を行う．

$$\underset{\boldsymbol{b},\boldsymbol{w},\boldsymbol{y}}{\text{minimize}} \quad \rho(-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})) \tag{2}$$

subject to

$$y_{jt} = b_j + \sum_{k\in K}\sum_{i\in I} w_{ijk} r_{i,t-k}, \quad (j,t) \in J \times (T \setminus K) \tag{3}$$

$$\sum_{j\in J} b_j = 1 \tag{4}$$

$$\sum_{j\in J} w_{ijk} = 0, \quad (i,k) \in I \times K \tag{5}$$

$$b_j \geq 0, \quad j \in J \tag{6}$$

$$y_{jt} \geq 0, \quad (j,t) \in J \times (T \setminus K) \tag{7}$$

式 (3) では式 (1) で示した線形制御方策を定義する．ここで，式 (4)–(5) により投資比率の合計が 1 であることが，式 (6)–(7) により投資比率が非負であることが定められている．

Structural regularization for portfolio control policies
† Nanari Wada, University of Tsukuba
‡ Yuichi Takano, University of Tsukuba

この最適化問題を解くことで得られる決定変数 $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{w}$ を用いて，線形制御方策の式に直近 $|K|$ 期間分の資産の収益率を入力することで，動的に投資比率を決定していくことができる．

3 提案手法

線形制御方策において投資資産の選択および入力資産の集約を行う手法について説明する．投資資産の選択においては, 投資対象資産 $j \in J$ に対して, 投資比率ベクトル $\boldsymbol{y}_j := (y_{jt})_{t \in T \setminus K} \in \mathbb{R}^{|T \setminus K|}$ の L_2 ノルムの総和をグループ正則化項として導入する．これにより，同一の資産 j に対して，すべての期間 $t \in T \setminus K$ で一斉に重みが 0 に潰れやすくなり，過度な分散投資を抑制することが期待される．

入力資産の集約においては，入力資産 $i \in I$ のベクトル $\boldsymbol{w}_i := (w_{ijk})_{(j,k) \in J \times K} \in \mathbb{R}^{|J \times K|}$ と基準となるベクトル $\tilde{\boldsymbol{w}} := (\tilde{w}_{jk})_{(j,k) \in J \times K} \in \mathbb{R}^{|J \times K|}$ の差の L_1 ノルムを正則化項として導入する．これにより，$\boldsymbol{w}_i$ が基準となるベクトル $\tilde{\boldsymbol{w}}$ に近づくよう誘導される．すべての入力資産の重みが一致することは，入力資産の集約を意味し，既存の線形制御方策における課題である訓練データへの過剰適合を抑制する効果が期待される．このとき，目的関数は以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & \rho(-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})) + \nu_1 \sum_{j \in J} \|\boldsymbol{y}_j\|_2 \\
& + \nu_2 \sum_{i \in I} \|\boldsymbol{w}_i - \tilde{\boldsymbol{w}}\|_1 \qquad (8)
\end{aligned}
$$

なお，$\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{R}_+$ は正則化の強さを決定する超パラメータである．

最適化モデルは以下のように記述できる．

$$
\begin{aligned}
\underset{\substack{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{w}, \tilde{\boldsymbol{w}}, \\ \boldsymbol{w}^{(+)}, \boldsymbol{w}^{(-)}, \boldsymbol{y}, \tilde{\boldsymbol{y}}}}{\text{minimize}} \quad & \rho(-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{y})) + \nu_1 \sum_{j \in J} \tilde{y}_j \\
& + \nu_2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} (w_{ijk}^{(+)} + w_{ijk}^{(-)}) \qquad (9)
\end{aligned}
$$

subject to

$$
\begin{aligned}
& \text{式 (3)–(7)} && (10) \\
& \tilde{y}_j \geq \sqrt{\sum_{t \in T \setminus K} y_{jt}^2}, \quad j \in J && (11) \\
& w_{ijk} - \tilde{w}_{jk} = w_{ijk}^{(+)} - w_{ijk}^{(-)}, \\
& \qquad (i,j,k) \in I \times J \times K && (12) \\
& w_{ijk}^{(+)} \geq 0,\ w_{ijk}^{(-)} \geq 0, \quad (i,j,k) \in I \times J \times K && (13)
\end{aligned}
$$

式 (11) は，補助変数 $\tilde{y}_j$ を用いて $\boldsymbol{y}_j$ の L_2 ノルムを表現する二次錐制約である．これにより，目的関数における L_2 ノルムの最小化を補助変数で置き換えて計算することが可能となる．また，式 (12)–(13) では，補助変数 $w_{ijk}^{(+)}, w_{ijk}^{(-)}$ を用いて $\|\boldsymbol{w}_i - \tilde{\boldsymbol{w}}\|_1$ を表す．これらの制約により，正則化項が目的関数に組み込まれる．

4 数値実験

提案手法の有効性を検証するために，実データに対する既存のポートフォリオ選択手法と提案手法の標本外投資成績を比較する．実験に使用したデータセットおよび結果の詳細は当日報告する．

参考文献

[1] DeMiguel, V., Nogales, F. J., & Uppal, R. (2014). Stock return serial dependence and out-of-sample portfolio performance. *The Review of Financial Studies*, 27(4), 1031–1073.

[2] Takano, Y., & Gotoh, J. (2023). Dynamic portfolio selection with linear control policies for coherent risk minimization. *Operations Research Perspectives*, 10, 100262.

[3] Hastie, T., Tibshirani, R., & Wainwright, M. (2015). *Statistical Learning with Sparsity: The Lasso and Generalizations*. Chapman and Hall/CRC.