

一般化 ZIXZA の計算複雑性について Computational Complexity of ZIXZA

成澤 宏知¹⁾元木 光雄²⁾

Hiroaki Narisawa Mitsuo Motoki

1 はじめに

ゲームの計算複雑性については、多くの研究が行われている。中でもパズルや手数制限のある二人ゲームについては、倉庫番 [1] やアマゾン [2] などいくつも示されている。一方で、二人用の手数制限がない（千日手を持つ）ゲームについてはあまり困難性がしられていない。証明が困難になる要因には、ゲームルールの複雑化があり、特にプレーヤ数が影響すると考えられている。本研究では、一般化 ZIXZA の必勝判定問題が EXPTIME 困難に属することを示す。

ZIXZA は二人用ゲームの一種である [3]。プレーヤは 6 面ダイスを駒として使用し、格子状の盤面にて交互に駒を動かして勝利を目指す。特徴として、駒の天面を比較し、相手の駒をゲームから除去できることがあげられる。勝利条件は「特定のマスにたどり着く」または「相手の駒を一定個数取り除く」のいずれかがある。

2 制約論理

計算複雑性の証明は基本的に、既に完全性が証明された問題へ多項式時間還元可能であることを示すことを行う。ただ、主な還元先である論理式充足問題へゲームを直接還元することは困難である。そこで今回は、ゲームの計算複雑性を容易に証明するために Hearn らによって考案された制約論理 [4] という手法を用いる。

制約論理は制約グラフを盤面としたゲームの総称である。プレーヤ数と手数制限の有無に合わせてルールが異なる制約論理が提示されている。ZIXZA は二人ゲームで手数制限がないことから、2CL (Two-player Constraint Logic) を用いる。2CL は EXPTIME 完全に属し、その証明は G_6 への還元で行われた [5]。その還元で構成された制約グラフには、図 1 の 6 種の頂点を利用された。そのため、任意のゲームから 2CL への還元による計算複雑性の証明の為に、この 6 種の頂点に対応したガジェットを構成する必要がある。

3 一般化 ZIXZA

ZIXZA とは格子状の盤面で 6 面ダイスを駒として利用して勝利を目指す、アストラクトゲームの一種である。ゲームの状態例が図 2 のようになる。

実際に対象とする一般化 ZIXZA についてルールを定める。盤面は格子状で、縦横のマス数を $n \times n$ とする。プレーヤ白 (黒) は駒としてそれぞれ $x, y (< n^2)$ 個の 6 面ダイスを使用する。ダイスは全て同じ面配置を持っている。各マスの状態、駒の配置状況、プレーヤの先手後手は初期状態として与えられている。プレーヤは交互に行動する。手番中は自身の駒 1 つに、「隣接したマスに縦回転しながら移動」または「その場で 90 度横回転」のいずれかを実行する。また、相手の駒と隣接した状態で、かつ互いの天面の値を比較し自身の駒が大きいなら「攻撃」が行える。攻撃では相手の駒を除去し、その場

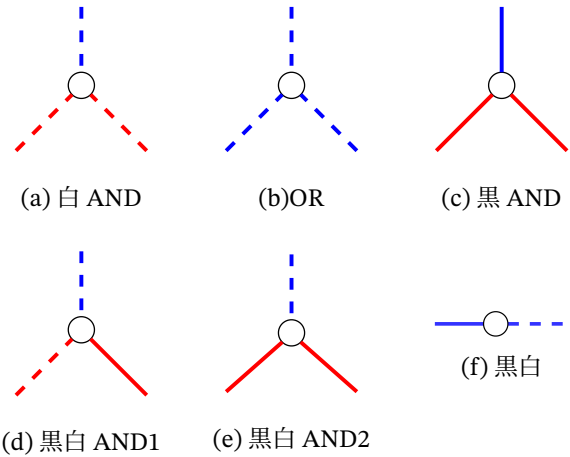


図 1: 2CL の基本頂点一覧

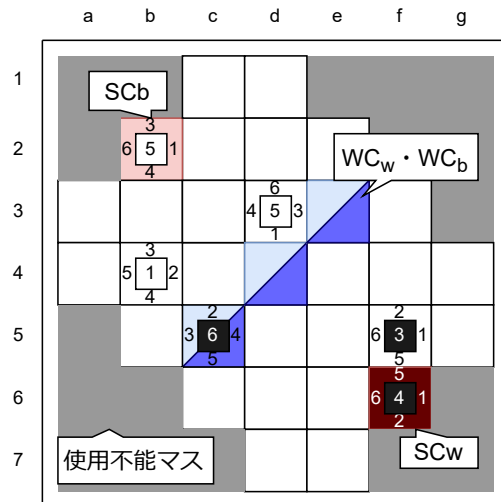


図 2: ゲーム盤面の基本形

所に移動する。なお、1 は 6 よりも大きい値として扱う。プレーヤが勝利するには、次の 3 種類の条件のいずれか 1 つを先に達成しなくてはならない。

- 占領:** プレーヤ白 (黒) に対応する。青マス WC_w (WC_b) 全てに白 (黒) の駒を同時に置く
- 到達:** プレーヤ白 (黒) に対応する、赤マス SC_w (SC_b) のいずれか 1 マスに白 (黒) の駒を置く
- 奪取:** 攻撃によって相手の駒を L 個除去する

一般化 ZIXZA 必勝判定問題を次のように定義する

- 入力:** 縦横 $n \times n$ の盤面 G , 奪取達成条件 L
- 質問:** プレーヤ白と黒は G 上で交互に駒を動かす。ただし、両者共に回転行動のみ制限される。このゲームにおいて白は必勝か。

1) 金沢工業大学 工学研究科 情報工学専攻

2) 金沢工業大学 情報理工学部 知能情報システム学科

回転行動の制限は、証明が全体的に困難になることを防ぐために導入する。

4 計算複雑性の証明

EXPTIME 困難性の証明は、制約論理への還元が多項式時間で完了することを示すことで行う。そのために、制約論理上で使用する各頂点对応したガジェットの構成が必須になる。

4.1 ガジェット例：白 AND ガジェット

証明には、図 1 に示した頂点对応するガジェットが必要になる。本稿ではそのうち白 AND ガジェットのみ説明する。白 AND ガジェットは制約論理の白 AND 頂点对応する。AND 頂点は論理回路の AND ゲートと比較したとき、接する二つの赤辺を入力、青辺を出力とみなせる。白 AND ガジェットの基本形が図 3 になる(以降では図中の座標で駒を示すことがある)。図中の右側と上側に伸びる通路が赤辺、左側が青辺の役割になる。図 3 の状態は、制約論理での赤辺 2 本が外向きで、青辺が内向きの状態に対応している。AND ガジェットは、二つの入力がかみ合っ動作する。

まず全てのガジェットに共通した要素の通路部について説明する。通路は主に 3 種の部位に分かれて構成される。中心にあたる信号部では、制約論理における信号伝達を実際に表現する。a4 から g4, d1 から d5 が信号部である。信号部では空きマスに向かって各駒が連鎖して移動できる。この空きマスが信号に相当する。すなわち、空きマスが存在する方向と辺の向きが対応する。信号部を囲むように、内壁と外壁がある。内壁は信号部に隣接して、白辺なら SC_w マスでかつ白の駒が設置される。外壁は内壁をさらに囲むように内壁と同じ天面の値をもつ辺色とは別色の駒で充填する。盤面のほとんどは外壁で占められている。内壁のマスは SC_w (SC_B) マスなので、内壁上の駒を動かすと相手の手番で外壁の駒が移動し敗北が決定する。一方で、ゲームルール上相手の駒と隣接した状態でも、両者の駒が同値の天面である場合お互いに干渉ができない。自分の駒同士もまた干渉することができない。これらの特性を用いて壁用の駒は一切行動できない様にする事で、信号部での一連の動作を保護している。ただし、一部のガジェットでは通路の基本に従わない場合がある。AND ガジェットの場合、d4 は信号部、c3・e3 は特殊な壁として機能する。AND ガジェットの詳細な動作について、図 3 の状態から、両赤辺が内向きに、青辺が外向きになる動作を説明する。必ず右側から動作を始める。g4 に空きマスが伝達したとき駒を動かす始める。d4 まで動かした後は、d5 を上に動かして最初の動作が終わる。次の反転動作として上側が動作する。d1 に空きマスが到達したとき外側へ順番に動かし始め、d4 まで上に移動する。そして、c4 が右に移動して停止する。その後出力として左側の動作が可能になる。b4 が右へ移動するところからはじめ、a4 以降が追従して動くことで、続くガジェットに空きマスが伝搬する。青辺を外向きから内向きに、赤辺を内向きから外向きにしたい場合、前述の動作を逆順に処理すればいい。この時も必ず、先に上側に向かって処理を行い、その後右側に空きマスを伝達させなくてはならない。正規の動作ではない行動をした場合、その行動を起

こしたプレーヤの敗北が決定する。例えば、c3・e3 の黒駒はいつでも隣接した白駒の除去や空きマスの割り込みができる。しかし、即座に動かした駒を除去され、そのまま白側が SC_w に到達し黒側の敗北となる。対して、白側が上側の入力を先に動作させたとき、c3・e3 の黒駒が d4 に到達できてしまう。

同様に図 1 であげた頂点对応したガジェットと補助用の仕組みを構築していく。

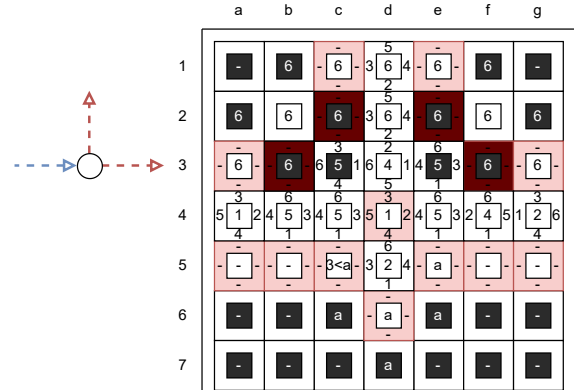


図 3: AND ガジェット基本形

4.2 EXPTIME 困難性の証明

本研究では、次の定理を証明する。

定理. 一般化 ZIXZA 必勝判定問題は EXPTIME 困難である

一般化 ZXIZA が EXPTIME 困難であることを示すために制約論理 2CL からの還元を示す。図 1 の 6 種の頂点からなる平面制約グラフが与えられたとき、対応する ZIXZA の配置をガジェットを用いて構成する。これにより、ZIXZA から 2CL への多項式時間で変換可能である。プレーヤ白が ZIXZA で勝利する必要十分条件は対応する 2CL ゲームに勝つことなので、ZIXZA は EXPTIME 困難となる。

5 おわりに

本研究で ZIXZA の計算複雑性について、2CL への多項式時間還元により EXPTIME 困難であることを示した、従って、回転行動を含めない ZIXZA においては最適戦略を探す効率的な手法が存在しないといえる。しかし本結果だけでは、回転行動を含めたより一般的なルールを含め、真に EXPTIME 完全か不明である。今後はガジェットの再構成やゲームの解析を行い、さらなる証明をしていく必要がある。また、他のゲームとの関連性についても考察することが求められる。

参考文献

- [1] Culberson, Joseph.: Sokoban is PSPACE-complete, (1997).
- [2] Hearn, R.A.: Amazons is PSPACE-complete, arXiv preprint cs/0502013 (2005).
- [3] 福島 了.: ZIXZA (ジグザ), <https://gamemarket.jp/game/107945> (参照 2025-06-01).
- [4] Hearn, R.A. and Demaine, E.D.: Games, puzzles, and computation. CRC Press (2009). 上原隆平 (訳): ゲームとパズルの計算量, 近代科学社 (2011).
- [5] Stockmeyer, L.J. and Chandra, A.K.: Provably difficult combinatorial games. SICOMP, vol.8, No.2, pp.151-174 (1979).