A-026

消失通信路における数独と Modular Magic Sudoku の特徴
Property of Sudoku and Modular Magic Sudoku for Erasure Channels

酒井 佳彦† 野澤 友希† 足立 智子†
Yoshihiko Sakai Yuuki Nozawa Tomoko Adachi

1. はじめに

Modular Magic Sudoku(以下 MMSu と略す)[1]は、数独にある条件を追加したものである。追加された条件により、数独より少ないヒントで解を求めることができる。先行研究[2,3,4]では、数独を符号語とみなし、消失通信路における数独符号語の復号誤り特性を調べている。本研究では、MMSu を数独符号語に用いることで、数独符号語の復号誤り特性の向上を図る。パズルから数独解を求める条件を追加したことにより、どの程度の変化があるかを調べる。

2. 先行研究の結果

2.1 多値伝送方式

通信路上で符号を送る際、一部の値の消失や誤受信の可能性がある。符号の伝送コストについては、先行研究[5]がある。本稿では消失に注目する。現在使われている符号の多くが 0 と 1 の 2 値(binary)のものである。2 値の他に、3 つ以上の数を使った多値(Multi Valued)の符号がある[6]。多値伝送方式では通信の高速化や大容量化が可能になる。

2.2 数独符号語の復号誤り特性

文献[2,3,4]では、大きさ 9×9 の数独解を 0 から 8 の数で構成された 9 値で長さ 81 の符号語とした。1 マスに対して 1 回通信路が使われ、確率 ε で値が消失する。数独パズルから数独解が一意に定まれば、通信路上で数独符号語の一部が消失しても復号できる。

文献[2,3]では、ランダムな複数の数独解からランダムなkマスを空白にした数独パズルが解けない回数を数え、その割合の平均をf_kとした。$p_k(\varepsilon)$と$F(\varepsilon)$を次式で定め、復号誤り特性 $F(\varepsilon)$を実験的に求めている。

$$p_k(\varepsilon) = \binom{81}{k}\varepsilon^k(1-\varepsilon)^{81-k}, \qquad F(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{81} p_k(\varepsilon) f_k$$

文献[4]では、空白セルの個数kに注目している。復号誤り確率$G(k)$をkの関数として新しく定義し、その特徴を実験的に調べた。

2.3 数独の解法ロジック

数独の解法ロジックは大きく分けて、数字の入るマスを絞り込む CUBE 法と、候補となる数字(ペンシルマーク)を空白マスに書き出す方法がある[7]。ペンシルマークを使う方法のうち簡単な解法として、1 つの候補しかないマスを埋める単一候補法や、行、列、ブロックの中で 1 か所にしか入らない数字を埋める単一マス法がある。その他に難易度の高い解法として、ペンシルマークを絞り込む双子法、三つ子法、共有候補法、対角線法などがある。

3. 提案手法

3.1 MMSu の条件 α

数独は、大きさ 3×3 の小方陣を、縦と横に 3 個ずつ並べ、大きさ 9×9 の方陣となっている。数独に追加される MMSu の条件は、各小方陣において、各列、各行、対角線二方向における総和が、9 により割り切れることである。本稿ではこれを条件 α と呼ぶ。

本研究では、数独として MMSu を用い、数独パズルを解く際の条件 α の有無で、数独符号語の復号誤り特性$F(\varepsilon)$にどのような違いが生じるかを調べる。

3.2 アルゴリズム

Step1: 大きさ 9×9 の初期行列を用意する。初期行列に MMSu の数独解を入れる。行列の各要素は数独のセルとして扱う。

Step2: 空白セル数 k の数独パズルを作成する。空白セル数 k は 0 から最大 81 まで変化させる。初期行列のセルからランダムに k 個の空白セルに置き換え、各 k に対して最大 100 個の数独パズルを作成する。空白セルの配置は記録し、重複しないようにする。

Step3: 順番に数独パズルを解き、記録していく。解法の各ステップでは、セルの数字が確定する毎に、縦、横、小方陣に同じ数字が存在しない数独の条件に従い、候補数字を除外する。解法は以下の通りである。

Step3-A(単一候補法): セル内の候補が 1 つに絞られた場合に、その数字を確定する。

Step3-B(単一マス法): 特定の数字が、行・列・小方陣内のいずれかで唯一のセルにしか入らない場合、その数字を確定する。

Step3-C(条件 α): 小方陣の行、列、対角線の和が 9 の倍数になるよう候補を絞り、1 つに絞られたその数字を確定する。

Step4: 各数独パズルに対して、Step3 の処理を、すべてのセルが埋まるまで、またはセルや候補が一切変化しなくなるまで再帰的に繰り返す。得られた解が初期行列と一致した場合は、「復号が成功した」と記録する。各パズルでは「解法の進捗」としてセルが埋まった個数も計測する。記録された成功回数から失敗率f_kを算出する。

条件 α の有無が解法過程に与える影響を調べるため、Step1 と Step2 で生成した同一のパズルを用い、条件 α の有無で Step3 と Step4 を実行し、それぞれの結果を比較する。

本研究では、Step3-C を実行しない場合を数独解法(条件 α 無し)、実行する場合を MMSu 解法(条件 α 有り)と呼ぶ。

†静岡理工科大学
Shizuoka Institute of Science and Technology

4. 結果および考察

本節の図は、数独解法(条件α無し)の結果を橙色線で、MMSu 解法(条件α有り)の結果を青色線で示す。

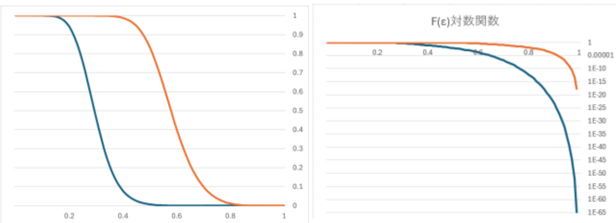
本研究では、ランダムなk個の空白セルの配置が重複しないよう数独パズルを 100 回作成する。大きさ 9×9 の数独では、空白セル数$k = 0{,}81$ のときは数独パズルのパターンは 1 通りになり、空白セル数$k = 1{,}80$ のときは 81 通りになり、100 通りのパターン選出が行えない。そこで図 2,3 では、横軸kを$2 \leq k \leq 79$とする。

4.1 復号誤り特性に関する結果

提案手法により復号誤り特性を調べた結果、図1を得た。横軸は非消失率$1-\varepsilon$、縦軸は復号誤り特性$F(\varepsilon)$の値として示す。図1(a)の縦軸は通常目盛り、図1(b)の縦軸は対数目盛(底 10)である。

非消失率$1-\varepsilon$が 0 に近いとき$F(\varepsilon)$の値は 1 であり、$1-\varepsilon$が 1 に近づくにつれ$F(\varepsilon)$の値は 0 に近づいた。

図1(a)の復号誤り特性$F(\varepsilon)$が 0 に近い値を取り始める非消失率$1-\varepsilon$の値は、数独解法(橙色)では 0.8 の時点であり、MMSu 解法(青色)では 0.5 の時点である。$F(\varepsilon)$が 1 に近い値を取り続ける$1-\varepsilon$の値は、数独解法(橙色)では 0.4 の時点であり、MMSu 解法(青色)では 0.2 の時点である。図1(b) の復号誤り特性$F(\varepsilon)$の最小値(常用対数)は、数独解法(橙色)では-18、MMSu 解法(青色)では -65 となる。

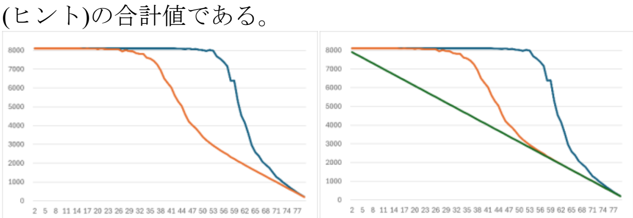


(a)　通常目盛り　　　(b)　対数目盛り

図1　非消失率に対する復号誤り特性

4.2 解法の進捗に関する結果

提案手法により解法の進捗を調べた結果、図2を得た。横軸は数独パズルの空白セル数k、縦軸は解法による最終的な非空白セルの合計値を示す。本実験では、空白セル数kに対し、それぞれ100回の実験を行うため、最終的な非空白セルの合計数の最大値は、$81 \times 100 = 8{,}100$ となる。図2(b)の緑色線は、数独パズル(初期)における非空白セル(ヒント)の合計値である。



(a)緑色線無し　　　(b)緑色線有り

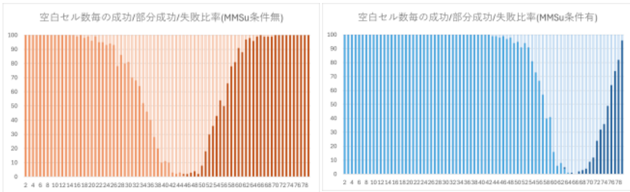
図2　解法の進捗の結果

図 2 では、縦軸(最終的な非空白セル個数)の値が 8000 以下となる横軸(空白セル数)kの範囲は、数独解法(橙色)では$29 \leq k \leq 79$となり、MMSu 解法(青色)では$51 \leq k \leq 79$である。数独パズルの空白セルが埋められた個数は、図 2 の橙色線/青色線と緑色線との差分の合計(囲まれた面積)から求められる。計算すると数独解法(橙色)では 84329、MMSu 解法(青色)では 186491 と求められ、MMSu 解法が 186491/84329=2.21 倍大きいことがわかる。

4.3 成功/部分成功/失敗に関する結果

提案手法により成功/部分成功/失敗の回数を調べた結果、図 3 を得た。横軸は数独パズルの空白セル数k、縦軸は成功(明るい色)/部分成功(薄い色)/失敗(暗い色)の回数を示す。成功は全ての空白セルを穴埋めできた場合(数独解が得られた)、部分成功は一部のみ空白セルを穴埋めできた場合(いくつかのセルを埋めたものの数独解は得られていない)、失敗は空白数が減らなかった場合(ヒントから他のセルを埋められなかった)とする。図3(a)は数独の解法のみ(条件α無し)の結果、図3(b)は MMSu の解法を含めた(条件α有り)結果である。

図 3 の(a),(b)ともに成功/部分成功/失敗の順番で左から右へ遷移していく。さらに、(b)は(a)よりも右側に寄っている。成功/部分成功/失敗の合計回数(明るい色/薄い色/暗い色の面積)は、数独解法(a)では 3296/2144/2524 であり、MMSu 解法(b)では 5631/1762/571 である。数独解法(a)に対する MMSu 解法(b)の成功の合計回数の比率は、5631/3296=1.71 となった。



(a) 数独解法　　　(b) MMSu 解法

図 3　成功/部分成功/失敗の回数

5. おわりに

第 4.1 節の結果から、MMSu 解法は、数独解法よりも、復号に失敗する非消失率$1-\varepsilon$が小さくなったといえる。第 4.2 節と第 4.3 節の結果から、MMSu 解法は、数独解法よりも、復号に成功する空白セル数 k の値が大きくなったといえる。よって、MMSu を数独符号語に用いることで、数独符号語の復号誤り特性の値が減少し、数独符号語として改善したといえる。

今後の課題として、数独の大きさを変更した場合にも、同様の改善がみられるかを調べることが挙げられる。

参考文献

[1] John Lorch, Ellen Weld, “Modular magic sudoku”, INVOLVE, vol.5, no.2, pp.173-186 (2012).

[2] 比田井亮, 西新幹彦, “数独の消失通信路に対する復号誤り特性”, 信学技報, 113(484), pp.1-6, 2014.

[3] M.Nishihara, R.Hidai, “Decoding Error of Sudoku for Erasure Channels”, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communication and Computer Science, No.12, pp.2641-2646, 2017

[4] 野澤友希, 足立智子, “多値伝送消失通信路における数独の空白セルと復号誤り確率”, 2023 年電子情報通信学会ソサイエティ大会講演論文集, p.14, 2023.

[5] Mikihiko NISHIARA, “Channel Coding with Cost Paid on Delivery”, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals Volume E105-A No.3, 2022.

[6] S.Pirbazari, A.Souri, R.Mirzaee, S.Jabbehdari, Multi valued parity generator based on Sudoku tables, IET Commun., 14(14), 2377-2386, 2020.

[7] 土出智也, 真貝寿明, 数独パズルの難易度判定, 大工大紀要.理工篇, 56(1), 1-18, 2011.