F-031

位数 5 の非ラテン方陣型 Modular magic square の探索
Search for modular magic squares with non-Latin squares type of order 5

伊藤充輝 † 　金谷 享侍 ‡ 　足立 智子 †
Mitsuki Itoh　Kyouji Kanaya　Tomoko Adachi

1. はじめに

奇数nに対し、位数n^2の Modular magic sudoku (MMSu と記す)は、サイズ$n^2 \times n^2$の数独にある条件を付け加えたものである。MMSu のブロック(サイズ$n \times n$)に当たるものを、位数nの Modular magic square (MMSq と記す)と呼ぶ。

Lorch and Weld[1]は、位数最小の$n = 3$の場合に、MMSq の特徴を明らかにした。位数$n = 3$の場合には、MMSq は、すべて、ラテン方陣型になる。しかし、位数nが 5 以上の場合には、MMSq はラテン方陣型と非ラテン方陣型がある。金谷・足立[2,3]は、位数$n = 5$の場合に、ラテン方陣型の MMSq を調べた。

そこで本研究では、位数$n = 5$の場合で、非ラテン方陣型の MMSq を探索し、その特徴を調べる。

2. 先行研究の結果

2.1 用語の説明

位数nの MMSq M の各シンボルを mod nでの値に置き換えた方陣を、Mに関連する Remainder square (以降は RSq と記す)と呼ぶ。位数nのラテン方陣とは、サイズ $n \times n$の方陣に n種類のシンボルを入れ、どの縦の列、横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 個ずつ出現するように配置したものである。

位数nの MMSq M に関連する RSq が位数nのラテン方陣になるとき、この MMSq M をラテン方陣型と呼ぶ。ラテン方陣にならないとき、非ラテン方陣型と呼ぶ。

2.2 位数$n = 3$の MMSq の特徴

Lorch and Weld [1]は、位数が最小の$n = 3$の場合に MMSq の特徴を明らかにした。位数$n^2 = 3^2 = 9$の MMSu における任意の位数$n = 3$の MMSq M について、Mに関連する RSq は、位数$n = 3$のラテン方陣であり、主対角成分または歪対角成分のシンボルがすべて 0 になる。

図 1(a)は、位数$n = 3$の MMSq であり、これをM とする。このとき、M の各シンボルを mod 3 での値に置き換えた方陣(RSq)は図 1(b)になる。図 1(b)は、位数$n = 3$のラテン方陣であり、歪対角成分のシンボルがすべて 0 になっている。

(a) MMSq

1	8	0
2	3	4
6	7	5

(b) RSq

1	2	0
2	0	1
0	1	2

図 1. 位数 3 の MMSq と RSq

†静岡理工科大学情報学部コンピュータシステム学科
Department of Computer Science, Faculty of Informatics, Shizuoka Institute of Science and Technology
‡スズキ(株) SUZUKI

2.3 位数$n = 5$のラテン方陣型 MMSq の特徴

金谷・足立[2,3]は、位数が$n = 5$の場合に、ラテン方陣型 MMSq の特徴を明らかにした。図 2(a)は位数$n = 5$の MMSq であり、これに関連した RSq は図 2(b)になる。

(a) MMSq

23	11	14	2	0
4	7	5	13	21
10	3	6	19	12
16	9	17	15	18
22	20	8	1	24

(b) RSq

3	1	4	2	0
4	2	0	3	1
0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4

図 2. 位数 5 のラテン方陣型 MMSq と RSq

3. 提案手法

位数 5 で非ラテン方陣型となる MMSq が複数存在する。これをプログラムにより探索する。

位数 5 の RSq では、サイズ5×5の方陣において、シンボル 0 が 5 個存在する。ラテン方陣なら、シンボル 0 は各行各列に 1 個ずつ存在する。非ラテン方陣なら、シンボル 0 は 1 つの行に複数個存在する。本研究では、RSq の 5 個のシンボル 0 が 1 行に集まっている場合と、2 行に集まっている場合について、MMSq を探索する。

方陣の最上段の行を第 0 行、最も左の列を第 0 列と呼ぶ。

3.1 シンボル 0 が 1 行に集まっている RSq の探索

RSq の第 0 行(一番上の行)のすべてのシンボルが 0 の場合を調べる。これを RSq-0 と記す。重複を減らすため、MMSq の第 0 行第 4 列のシンボルを 0 とする。プログラムの実行時間短縮のため、RSq に関連する MMSq の第 0 行は“5,10,15,20,0”とする。

3.2 シンボル 0 が 2 行に集まっている RSq の探索

RSq の第 0 行第 2 列から第 4 列までの 3 個のセルと第 1 行第 3 列から第 4 列までの 2 個のセルのシンボルが 0 となる場合を探索する。すなわち、RSq の第 0 行「**000」かつ第 1 行「***00」となる。第 0 行「14000」かつ第 1 行「11300」の方陣を RSq-1 と記す。RSq の各シンボルが 5 個ずつ存在する等の条件から、RSq-1 は 17 個の方陣が考えられる。

重複を減らすため、RSq-1 に関連する MMSq の第 0 行第 4 列のシンボルを 0 とする。RSq-1 でのシンボル 0 の他のセルが MMSq でのシンボル“5,10,15,20”の 4!=24 通りの組み合わせになるので、17×24= 通りの方陣について調べる。

比較のために、シンボルの並びが RSq-1 の左右逆位置かつ 5 の補数の場合を探索する。これを RSq-2 と記す。RSq-2 の第 0 行「00014」かつ第 1 行「00244」となる。

4. 結果および考察

4.1 シンボル 0 が 2 行になる RSq の探索結果

探索結果は表 1 および表 2 になる。

表 1　RSq-1 に関連する MMSq の個数

RSq方陣 NO	第2行	第3行	第4行	RSqの個数	MMSqの個数
1-1	12223	34323	44214	1	510
1-2	12232	34341	44232	1	555
1-3	12331	44232	34242	1	535
1-4	13222	34224	43314	1	535
1-5	13222	34341	43242	1	485
1-6	22132	31434	32244	1	465
1-7	22213	24234	44313	1	495
1-8	23334	23212	44214	1	560
1-9	23442	33121	34242	1	475
1-10	23442	44232	23131	1	470
1-11	31123	32244	22443	1	435
1-12	33414	34224	23122	1	555
1-13	33441	23122	34242	1	485
1-14	34314	24234	32212	1	535
1-15	34341	24243	32221	1	575
1-16	42234	21133	22443	1	515
1-17	42234	32244	11332	1	495

表 2　RSq-2 に関連する MMSq の個数

RSq方陣 NO	第2行	第3行	第4行	RSqの個数	MMSqの個数
2-1	23334	23212	14311	1	510
2-2	32334	41212	32311	1	555
2-3	42234	32311	31312	1	535
2-4	33324	13312	14221	1	535
2-5	33324	41212	31321	1	485
2-6	32433	12142	11332	1	465
2-7	24333	12313	24211	1	495
2-8	12223	34323	14311	1	560
2-9	31123	43422	31312	1	475
2-10	31123	32311	42423	1	470
2-11	23442	11332	21133	1	435
2-12	14122	13312	33423	1	555
2-13	41122	33423	31312	1	485
2-14	14212	12313	34332	1	535
2-15	41212	21313	43332	1	575
2-16	12331	22443	21133	1	515
2-17	12331	11332	32244	1	495

RSq-1-1 とその 5 の補数の逆位置である RSq-2-1 では MMSq の個数が一致する。RSq-1-2 と RSq-2-2 等に関しても個数が一致する。

探索した非ラテン方陣型 MMSq の一例を図 3,4 に示した。

1	9	5	10	0
6	11	23	15	20
21	7	17	12	18
8	4	3	22	13
14	19	2	16	24

(a) MMSq

1	4	0	0	0
1	1	3	0	0
1	2	2	2	3
3	4	3	2	3
4	4	2	1	4

(b) RSq-1-1

図 3. RSq-1 に関連する MMSq

0	10	5	1	9
20	15	7	19	14
2	8	18	23	24
12	13	17	11	22
16	4	3	21	6

(a) MMSq

0	0	0	1	4
0	0	2	4	4
2	3	3	3	4
2	3	2	1	2
1	4	3	1	1

(b) RSq-2-1

図 4. RSq-2 に関連する MMSq

4.2 シンボル 0 が 1 行に集まっている RSq の特徴

第 0 行が 0 の場合非ラテン方陣型 MMSq の結果は表 3 のようになる。第 1 行が 11134(c1)とその 5 の補数の逆位置である 12444(c5)では各方陣の個数が一致する。(c2)と(c6)等に関しても個数が一致する。

表 3　RSq-0 に関連する MMSq の個数

第1行	RSqの個数	MMSqの個数
11134 (c1)	31	3895
11224 (c2)	68	7560
11233 (c3)	88	9655
12223 (c4)	41	5130
12444 (c5)	31	3895
13344 (c6)	68	7560
22344 (c7)	88	9655
23334 (c8)	41	5130
計	458	52480

参考文献

[1] John Lorch and Ellen Weld, “Modular magic sudoku”, INVOLVE, vol.5, no.2, pp.173-186 (2012).
[2] 金谷享待，足立智子，“位数５の Modular magic sudoku の探索”，第 22 回情報科学技術フォーラム (FIT2023), 予稿集，NO.2，pp.481-482，2023.
[3] 金谷享待，足立智子，“一般的な位数５の Modular magic sudoku の解明”，2023 年電子情報通信学会ソサイエティ大会論文集，p.13, 2023.