F-030

位数 5 以上のラテン方陣型 Modular magic squar の探索
Search for modular magic squares with Latin squares type of order 5 or higher

塩澤拓馬 † 足立 智子 †
Shiozawa Takuma Tomoko Adachi

1. はじめに

奇数nに対し、位数n^2の Modular magic sudoku (以降は MMSu と記す)は、サイズ$n^2 \times n^2$の数独にある条件を付け加えたものである。MMSu のブロック(サイズ$n \times n$)に当たるものを、位数nの Modular magic square (以降は MMSq と記す)と呼ぶ。

Lorch and Weld[1]は、位数最小の$n = 3$の場合に、MMSu の小方陣になる MMSq は、すべて、ラテン方陣型になることを明らかにした。しかし、位数nが 3 でない場合には、MMSq はラテン方陣型と非ラテン方陣型がある。金谷・足立[2,3]は、位数$n = 5$の場合に、ラテン方陣型の MMSq を調べたが、探索に時間がかかった。さらに位数nが大きくなると、探索が非常に困難である。

そこで、本研究では、ラテン方陣型を限定することで、探索範囲を減らし、位数nが 5 以上の MMSq を探索する。

2. 用語の説明

2.1 ラテン方陣

位数nのラテン方陣とは、サイズ $n \times n$の方陣に n種類のシンボルを入れ、どの縦の列、横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 個ずつ出現するように配置したものである。例として、位数 5 のラテン方陣を図 1 に挙げる。

1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4

図 1 位数 5 のラテン方陣の例

2.2 MMSq と RSq

サイズ $n \times n$の方陣に、$0,1,\ldots,n^2-1$の数を入れ、どの行の和、列の和、対角線の和も、n^2を法として 0 と合同になるように配置したものを、位数nの MMSq と呼ぶ。MMSq の条件式は、行和についてn本、列和についてn本, 対角和について 2 本、合計$2n+2$本である。

MMSq は魔方陣にはならないし、魔方陣は MMSq にはならない。

位数nの MMSq M の各シンボルを mod nでの値に置き換えた方陣を、M に関連する Remainder square (以降は RSq と記す)と呼ぶ。位数nの MMSq M に関連する RSq が位数nのラテン方陣になるとき、この MMSq M をラテン方陣型と呼ぶ。

† 静岡理工科大学情報学部コンピュータシステム学科
Department of Computer Science, Faculty of Informatics,
Shizuoka Institute of Science and Technology

2.3 数独解

位数n^2の数独解(以降は数独と記す)とは,位数n^2のラテン方陣であり、サイズ$n \times n$のn^2個のブロックに全てのシンボルがちょうど 1 回ずつ出現するように配置したものである。以降は数独と呼ぶ。

2.4 Modular magic sudoku (MMSu)

位数n^2の MMSu とは、位数n^2の数独に、どの小方陣も位数nの MMSq になるという条件を付け加えたものである。MMSu では、nが 3 以上の奇数に限られる。シンボルは、$0,1,\ldots,n^2-1$となる。

3. 先行研究の結果

Lorch and Weld[1]は、位数最小の$n = 3$の場合に、MMSq と MMSu の特徴を明らかにした。位数$n = 3$の場合には、MMSq は、すべて、ラテン方陣型になることが判明した。

金谷・足立[2,3]は、位数$n = 5$の場合にラテン方陣 MMSq の特徴を明らかにした。[3]によると、ラテン方陣型 MMSq の結果は表 1 である。

表 1 kごとの MMSq の個数と CPU の計算時間

	個数[個]		計算時間[秒]	
k	条件Ⅰ	条件Ⅱ	条件Ⅰ	条件Ⅱ
1	40500	18000	64.62824	53.27256
2	22500	18000	87.57231	46.32587
3	22500	18000	87.16319	45.07059
4	0	0	30.68335	31.16114
計	85500	54000	270.04709	175.83016

表 1 のk,条件 I, II については、[3]を参照。後述の提案手法では、探索範囲を条件 I, II を満たす MMSq で$k = 1$の場合に限定している。

4. 提案の手法

ラテン方陣型 MMSq を限定することで、探索範囲を減らし、位数 5 および 7 のラテン方陣型 MMSq をプログラムにより探索する。探索範囲の限定の仕方は、足立・桑嶋[4]を参考にしている。

探索する MMSq を$A = (a_{i,j})$とする。Aに関連する RSq は、図 1 のように、歪対角成分のシンボルが 0 であり、最上段の行のシンボルが 1,2,3,...,0 であり、次の行のシンボルは 1 つ前の行のシンボルを 1 つずつずらしたものとする。これは、金谷・足立[3]における $k = 1$の場合に相当する。

条件 I はAが MMSq の条件式を満たすことであり、条件 II はAを上に 1 行、右に 1 列ずらした方陣が MMSq の条件式を満たすことである。探索して確認する条件式は、条件 I,II を満たす。

本稿では、方陣の最上段の行を第 1 行と呼び、最も左の列を第 1 列と呼ぶ。

探索する MMSq$A = (a_{i,j})$について、$a_{i,j} \equiv m(mod\,n)$のときに、本文中では「$a_{i,j}[m]$」と記し、図 2,3 では「$i,j[m]$」と記す。また、 $a_{i,n+1-i} \equiv 0(mod\,n)$のときに、本文中では「$d_i$」と記し、図 2,3 では「$di$」」と記す。

4.1 位数$n = 5$のラテン方陣型 MMSq の探索

重複を減らすため、MMSq の第 1 行 5 列のシンボルは 0 とする。また、d_1からd_5をそれぞれ、0,5,10,15,20 として値を固定し探索を行う。探索の効率化を図るために、下記の条件を加える。

足立・桑嶋[4]より$a_{1,3}[3] + a_{2,3}[4] - a_{3,1}[3] - a_{3,2}[4] \equiv 0(mod\,5)$を仮定する。この左辺が 5 の倍数となる$a_{i,j}$の候補の組み合わせを列挙する。$a_{1,1}[1], a_{1,2}[2], a_{2,1}[2], a_{2,2}[3]$はすべての候補を試すアルゴリズムとする。他のシンボルは条件式より定まる。

1,1 [1]	1,2 [2]	1,3 [3]	1,4 [4]	d1
2,1 [2]	2,2 [3]	2,3 [4]	d2	2,5 [1]
3,1 [3]	3,2 [4]	d3	3,4 [1]	3,5 [2]
4,1 [4]	d4	4,3 [1]	4,4 [2]	4,5 [3]
d5	5,2 [1]	5,3 [2]	5,4 [3]	5,5 [4]

図 2　探索する位数 5 の MMSq

4.2 位数$n = 7$のラテン方陣型 MMSq の探索

重複を減らすため、MMSq の第 1 行 7 列のシンボルは 0 とする。また、d1 から d7 をそれぞれ 0,7,14,21,28,35,42 として値を固定し探索を行う。探索の効率化を図るために、下記の条件を加える。

1,1[1]	1,2[2]	1,3[3]	1,4[4]	1,5[5]	1,6[6]	d1
						0
2,1[2]	2,2[3]	2,3[4]	2,4[5]	2,5[6]	d2	2,7[1]
					7	
3,1[3]	3,2[4]	3,3[5]	3,4[6]	d3	3,6[1]	3,7[2]
				14		
4,1[4]	4,2[5]	4,3[6]	d4	4,5[1]	4,6[2]	4,7[3]
			21			
5,1[5]	5,2[6]	d5	5,4[1]	5,5[2]	5,6[3]	5,7[4]
		28				
6,1[6]	d6	6,3[1]	6,4[2]	6,5[3]	6,6[4]	6,7[5]
	35					
d7	7,2[1]	7,3[2]	7,4[3]	7,5[4]	7,6[5]	7,7[6]
42						

図 3　探索する位数 7 の MMSq

3 個のシンボル$a_{1,3}[3], a_{2,2}[3], a_{3,1}[3]$では$7P3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$通りから 1 つの組み合わせを選ぶ。7 個のシンボル$a_{i,j}[4]$では 7P7=7!=5040 通りから 1 つの組み合わせを選ぶ。7 個のシンボル$a_{i,j}[5]$では$7P7 = 7! = 5040$通りから 1 つの組み合わせを選ぶ。これは、$210 \times 5040 \times 5040 = 5334336000 \approx 5.33 \times 10^9$通りから 1 つの組み合わせを選んだことになる。

17 個のシンボル$a_{i,j}[m]$,m=3,4,5 が選んだ組み合わせの場合に、下記のプログラムで MMSq の探索を試す。組み合わせのセットを選び変えて、MMSq の探索を試していく。

探索プログラムでは、7 個のシンボル$a_{i,j}[6]$は$7P7 = 7! = 5040$通りのすべてを試し、1 個のシンボル$a_{1,1}[1]$は$7P1 = 7$通りのすべてを試し、1 個のシンボル$a_{3,7}[2]$は$7P1 = 7$通りのすべてを試すアルゴリズムとする。他のシンボルは条件式より定まる。

5. 結果および考察

5.1 位数$n = 5$のラテン方陣の探索結果

探索結果は 18000 通りとなり、金谷・足立の$k = 1$の結果と一致した。計算時間は、提案手法では 2 秒以下となり、金谷・足立の 53 秒より短縮できた。

5.2 位数$n = 7$のラテン方陣の探索結果

探索結果は表 2 にまとめた。

表 2　位数 7 の探索結果

	m=3の3個のシンボル	m=4の7個のシンボル	m=5の7個のシンボル	探索した方陣の個数	MMSqの有無
組み合わせのセット	h1~h30	4,11,18,25,39,32,46	5,12,19,26,40,47,33	7,408,800	無
	h1~h30	47,32,11,39,18,25,4	12,47,5,40,26,33,19	7,408,800	無
	h1~h30	4,39,18,46,25,11,32	5,33,12,19,40,47,26	7,408,800	無
	h1~h30	4,46,39,32,11,18,25	5,33,26,12,47,40,19	7,408,800	無
	h1~h30	46,32,11,39,18,25,4	12,47,5,40,26,33,19	7,408,800	無
	10,31,17	4,39,18,46,25,11,32	5,33,12,19,40,47,26	246,960	無
	31,24,17	4,46,39,32,11,18,25	5,33,26,12,47,40,19	246,960	無
計	152通り			37,537,920	

実験で用いた 3 個のシンボル$a_{1,3}[3], a_{2,2}[3], a_{3,1}[3]$の組み合わせのうち、 $h1$から$h30$は表 3 である。

表 3　$h1$から$h30$の組合せ

h1	3, 10, 17	h2	3, 10, 24	h3	3,10,31	h4	3, 10, 38	h5	3, 10, 45
h6	3, 17, 10	h7	3, 17, 24	h8	3, 17, 31	h9	3, 17, 38	h10	3, 17, 45
h11	3, 24, 10	h12	3, 24, 17	h13	3, 24, 31	h14	3, 24, 38	h15	3, 24, 45
h16	3, 31, 10	h17	3, 31, 17	h18	3, 31, 24	h19	3, 31, 38	h20	3, 31, 45
h21	3, 38 ,10	h22	3, 38, 17	h23	3, 38, 24	h24	3, 38, 31	h25	3,38,45
h26	3, 45, 10	h27	3, 45, 17	h28	3, 45, 24	h29	3, 45, 31	h30	3, 45, 38

本稿提出時までの実験では 152 通りの探索を行ったが、位数 7 の MMSq を発見できなかった。引き続き別の組み合わせで探索を行う。

5.3 考察

提案手法がなければ、$5040^7 \approx 82.61 \times 10^{24}$通りを探索する必要がある。しかし、提案手法により$210 \times 5040^2 \approx 5.33 \times 10^9$通りを探索すればよいことになった。なので提案手法によって短縮することができた。今後も提案手法通りに探索を行うことにより、位数 7 の MMSq を見つけることができるだろう。

6. おわりに

位数 7 の探索手法では MMSq を探索するには時間がかかるため、さらなるアルゴリズムの効率化が課題となる。

参考文献

[1] John Lorch and Ellen Weld, “Modular magic sudoku”, INVOLVE, vol.5, no.2, pp.173-186 (2012).

[2] 金谷享待, 足立智子, “位数 5 の Modular magic sudoku の探索”, 第 22 回情報科学技術フォーラム (FIT2023), 予稿集, NO.2, pp.481-482, 2023.

[3] 金谷享待, 足立智子, “一般的な位数 5 の Modular magic sudoku の解明”, 2023 年電子情報通信学会ソサイエティ大会論文集, p.13, 2023.

[4] 足立智子, 桑嶋大地, “Modular magic sudoku の構成”, 日本応用数理学会 第 17 回研究部会連合発表会, オンライン開催, 2021.