

## 量子計算機実機を用いた数値解析

泉 優行<sup>†</sup>川原 仁志<sup>†</sup>鈴木 優之<sup>†</sup>

Yuki Izumi

Hitoshi Kawahara

Hiroto Suzuki

## 1. はじめに

量子計算機は量子力学の原理により動作する計算機である。量子計算においては、従来の古典計算よりも高速に動作することが理論的に保証されたアルゴリズム (e.g., Grover 探索アルゴリズム, Shor のアルゴリズム, Harrow-Hassidim-Lloyd (HHL) アルゴリズム) が知られており、量子計算機によって、従来非常に時間のかかっていたタスクを高速に実行できることが期待されている。しかし、技術的な問題のため、完全なエラー訂正機能を備えた誤り耐性量子計算機 (Fault-Tolerant Quantum Computer, FTQC) は現在まだ登場していない。量子計算は行列やベクトルによる線型代数演算であるため、これまで量子アルゴリズムの検証等においては、Qiskit や Qulacs 等に代表される量子計算ライブラリを用いたシミュレーションが多く用いられてきた。しかし、その計算には量子ビット数に対して指数関数的に増大するデータを保持する必要があるため、古典計算機では通常高々数十量子ビットのサイズの計算が限度である。現在はまだシミュレーションが主流であるが、今後有用な量子計算を行うには、実際の量子計算機を利用する必要性が増していくと考えられる。

近年、量子計算機の規模や性能が向上し、エラー訂正機能のない中間規模の量子計算機 (Noisy Intermediate Scale Quantum, NISQ) の時代が到来した。そのため、今後本格化していく NISQ 時代に向けて、現在利用可能な量子計算機を実際に利用して具体的な課題に取り組むことは非常に重要である。NISQ 計算機においては、変分量子回路に基づく量子・古典ハイブリッドアルゴリズムの利用が想定されている。これはパラメータ付き量子回路 (ansatz) を用いたコスト関数の計算と、コスト関数最小化のためのパラメータ探索をそれぞれ量子計算機と古典計算機上でを行い、コスト関数の値が十分小さくなるまで繰り返すという方法である。

本論文では、上記の量子・古典ハイブリッドアルゴリズムを用い、後述の偏微分方程式の数値解析に関する 2 つの問題を実際にイオントラップ型の量子計算機を用いて解くことを試みる。よく知られているように、この種の問題は適当な離散化によって、連立 1 次方程式  $Ax = b$  を解く問題に帰着され、この解は元の問題の近似解を与える。この連立方程式に対し、変分アルゴリズムである VQLS (Variational Quantum Linear Solver) [1] を用いて解  $x = A^{-1}b$  を求める。

本論文の構成は次の通りである。第 2 節では、連立 1 次方程式と最小化問題との関係について簡単に紹介し、連立 1 次方程式を解くこととある関数を最小化することが同値であることを紹介する。第 3 節および第 4 節では、第 2 節の最小化問題からコスト関数を定め、量子計算機を用いた VQLS の構成と実行手順を説明する。第 5 節では、具体的な 2 つの問題を実際の量子計算機を用いて解く。1 つ目は 2 次

元静磁場解析の問題を有限要素法によって 4 次の係数行列と右辺ベクトルを定め、2 量子ビットの量子回路上で近似解を求める。2 つ目は 2 次元 Poisson 方程式の問題を差分法によって 16 次の係数行列と右辺ベクトルを定め、4 量子ビットの量子回路上で近似解を求める。そして最後に、第 6 節で結論を述べる。

## 2. 連立 1 次方程式と最小化問題

本節では、連立 1 次方程式と最小化問題について、[4] に基づいて紹介する。

$N \times N$  行列  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ,  $N$  次元ベクトル  $b \in \mathbb{R}^N$  に対し、 $x \in \mathbb{R}^N$  を未知とする方程式

$$Ax = b \quad (2.1)$$

を考える。ただし以後、 $b \neq 0$  とし、 $A$  は実対称かつ正定値であると仮定する。このとき、方程式 (2.1) はただ 1 つの解  $x = A^{-1}b$  を持つ。以後、この解を  $u \in \mathbb{R}^N$  で表す。すなわち、 $Au = b$  である。

## 2.1 方程式の解と最小化問題

$Au = b$  であることから、 $x \in \mathbb{R}^N$  に対し、

$$\begin{aligned} L(x) &:= \frac{1}{2} x^\top Ax - b^\top x \\ &= \frac{(x-u)^\top A(x-u)}{2} - \frac{b^\top u}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

が成り立つ。ここで、上付き添え字 “ $\top$ ” は転置を表す。よって、 $A$  が正定値であることと合わせると、次が分かる。

**命題 2.1.** (2.1) の解  $u$  は  $L(u) = \min_{x \in \mathbb{R}^N} L(x)$  を満たす。さらに、 $L(u') = \min_{x \in \mathbb{R}^N} L(x)$  ならば、 $u' = u$  である。

**注意 2.2.** 命題 2.1 はより一般には Lax-Milgram の定理として知られている。[2]

以上より、方程式 (2.1) を解くことは  $L$  を最小化することと同値である。

## 2.2 最小化問題の解に関する不等式評価

量子計算機上では、ベクトルは常に正規化された量子状態として保持される。そのため、 $r \in \mathbb{R}$  とし、 $\psi \in \mathbb{R}^N$ ,  $|\psi| := \sum_{j=1}^N |\psi_j|^2 = 1$  に対して、変形した  $L$  を考える。今、

$$\begin{aligned} L(r\psi) &= \frac{r^2}{2} \psi^\top A\psi - rb^\top \psi \\ &= \frac{\psi^\top A\psi}{2} \left\{ \left( r - \frac{b^\top \psi}{\psi^\top A\psi} \right)^2 - \frac{(b^\top \psi)^2}{(\psi^\top A\psi)^2} \right\} \\ &\geq -\frac{1}{2} \frac{(b^\top \psi)^2}{\psi^\top A\psi} =: \tilde{L}(\psi) \end{aligned} \quad (2.3)$$

<sup>†</sup> 伊藤忠テクノソリューションズ株式会社 Itochu  
Techno-Solutions Corporation

である。 $r = b^\top \psi / (\psi^\top A \psi)$  のとき、 $L(r\psi) = \tilde{L}(\psi)$  である。また、 $\tilde{u} := u/|u|$  に対し、

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} L(x) = \tilde{L}(\tilde{u}) = -\frac{b^\top u}{2}$$

が成り立つ。したがって、 $\psi \in \mathbb{R}^N, |\psi| = 1$  が  $\tilde{L}$  を最小にするならば、 $\psi$  は方程式 (2.1) の正規化された解に一致する。

ここで、 $A$  の最小固有値を  $\lambda > 0$  とすると、(2.2) より次が得られる。

**命題 2.3.**  $\psi \in \mathbb{R}^N, |\psi| = 1$  とし、 $r = b^\top \psi / (\psi^\top A \psi)$  とおく。このとき、

$$\begin{aligned} |r\psi - u|^2 &\leq 2 \cdot \frac{L(r\psi) - L(u)}{\lambda} \\ &= 2 \cdot \frac{\tilde{L}(\psi) - \tilde{L}(\tilde{u})}{\lambda} \end{aligned}$$

が成り立つ。

したがって、この命題より、 $\tilde{L}(\psi)$  が最小値  $\tilde{L}(\tilde{u})$  に十分近いならば、 $r\psi$  は  $u$  を近似する。

### 3. VQLS のコスト関数の計算方法の概要

本節では、VQLS に用いるコスト関数と、実際に量子計算機を用いた際のコスト関数の計算方法について紹介する。

$n = 1, 2, \dots$  を量子ビット数とし、 $N = 2^n$  とする。以後、量子ビット数を明示する場合を除いて、 $|0\rangle^{\otimes n}$  を単に省略して  $|0\rangle$  で表す。

#### 3.1 コスト関数

適当な  $N \times N$  ユニタリ (直交) 行列  $U_b \in \mathbb{R}^{N \times N}$  に対し、 $\tilde{b} := b/|b| = U_b|0\rangle$  とできる。 $U_b$  を具体的に量子回路として構成する方法は[3]を参照されたい。また、パラメータ付き回路 (ansatz) を  $(U(\theta))_{\theta \in \Theta} \subset \mathbb{R}^{N \times N}$  とし、 $|\psi(\theta)\rangle = U(\theta)|0\rangle$  とする。ここで、 $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  はパラメータ  $\theta$  が取り得る全体を表し、各  $\theta \in \Theta$  に対し、 $U(\theta)$  は直交行列とする。

またここで、 $A$  をユニタリ行列の線型結合

$$A = \sum_{j=1}^{4^n} c_j A_j, \quad c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, 4^n$$

に分解することができる。ただし、各  $j = 1, 2, \dots, 4^n$  に対し、 $A_j \in \{\sigma_1 \otimes \dots \otimes \sigma_n \mid \sigma_k = I, X, Y, Z, k = 1, 2, \dots, n\}$ ,  $I$  を 2 次単位行列、 $X, Y, Z$  を Pauli 行列、すなわち、

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする。ここで、 $i$  は虚数単位である。

このとき (2.3) より、 $\theta \in \Theta$  に対してコスト関数を

$$\begin{aligned} C(\theta) &= -\frac{1}{2} \frac{\langle \tilde{b} | \psi(\theta) \rangle^2}{\langle \psi(\theta) | A | \psi(\theta) \rangle} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\langle 0 | U_b^\dagger U(\theta) | 0 \rangle^2}{\sum_j c_j \langle 0 | U^\dagger(\theta) A_j U(\theta) | 0 \rangle} \end{aligned} \quad (3.1)$$

で定める。命題 2.3 より、コスト関数  $C$  を十分小さくする  $\theta \in \Theta$  に対し、 $|\psi(\theta)\rangle$  は (2.1) の正規化された近似解である。

#### 3.2 コスト関数 (3.1) の分子の計算

$\langle \tilde{b} | \psi(\theta) \rangle = \langle 0 | U_b^\dagger U(\theta) | 0 \rangle \in \mathbb{R}$  であることに注意すると、分子の計算のためには  $|0\rangle^{\otimes n}$  の確率振幅を測定すればよい。すなわち、 $|0\rangle^{\otimes n} = |00 \dots 0\rangle$  が測定された割合を求める。

#### 3.3 コスト関数 (3.1) の分母の計算

分母の計算のための測定は、それぞれの量子ビット毎に基底変換を用いて行われる。各量子ビットの測定は、通常 Pauli 基底  $Z$  により行われるが、基底  $X$  および  $Y$  による測定については、関係式

$$X = HZH, \quad Y = SHZHS^\dagger \quad (3.2)$$

による基底変換を用いる。

なお本論文で検証するに当たっては Qiskit を利用しているが、Qiskit の場合は Estimator クラスによって、基底変換された測定結果を取得することができる。

### 4. VQLS 実行手順

前節までに述べた、方程式 (2.1) を量子計算機によって解く方法である VQLS の基本的な手順を以下に示す。

#### VQLS 実行手順

$\theta$  に初期値を代入する。

while true do

量子回路  $U_b^\dagger U(\theta)$  を実行し、振幅  $\langle 0 | U_b^\dagger U(\theta) | 0 \rangle^2$  を求める。

for  $j = 1$  to  $4^n$  do

Ansatz  $U(\theta)$  を実行し、 $A_j$  で測定した期待値  $\langle 0 | U^\dagger(\theta) A_j U(\theta) | 0 \rangle$  を求める。

end

上記で求めた値を用いて  $C(\theta)$  を計算する。

if  $C(\theta)$  が十分小さい then

break

else

古典計算機で  $C(\theta)$  に対して最適化アルゴリズムを実行し、その出力を  $\theta$  に代入する。

end

end

Result:  $\arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} C(\theta)$  の近似値  $\theta$

### 5. 検証を行う問題

本論文では次の 2 つの問題を扱う。

- 2 次元静磁場解析
- 2 次元 Poisson 方程式

#### 5.1 2 次元静磁場解析

図 5.1 のように、3 角形 PQR の領域を考える。点 P 上に 6 (Wb/m) を、辺 QR 上に 0 (Wb/m) をそれぞれ固定境界条件として与え、また辺 PQ, PR を自然境界条件とする。ただし、磁気抵抗率を 1 とする。このときの磁束分布を有限要素法により求める。[5]

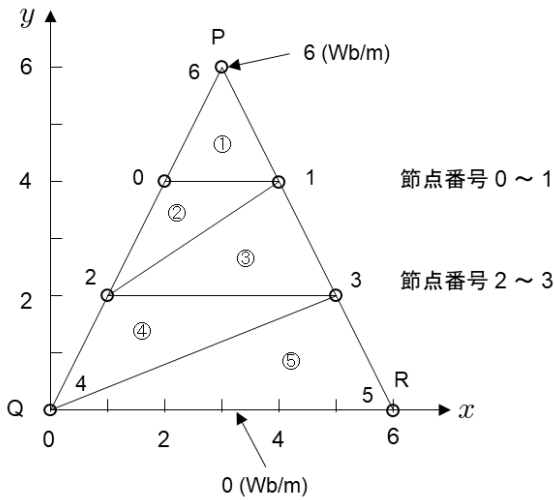


図 5.1. 2次元静磁場解析の要素と節点

図 5.1 の通り, 要素と節点を定めた有限要素法によって定まる連立方程式は,

$$\begin{pmatrix} 2.25 & -1.25 & -0.75 & 0 \\ -1.25 & 2.25 & 0 & 0.75 \\ -0.75 & 0 & 2.625 & -0.625 \\ 0 & -0.75 & -0.625 & 2.625 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

である. このとき厳密解は,

$$x_{\text{exact}} := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.0870 \\ 2.0870 \\ 0.7826 \\ 0.7826 \end{pmatrix}$$

である.

### 5.1.1 Ansatz

問題の対称性より,  $x_0 = x_1, x_2 = x_3$  と仮定してよい. これに基づいて図 5.2 によって定める ansatz  $(U(\theta_0))_{\theta_0 \in [0, \pi]}$  を採用する. このとき,

$$|x_{\text{exact}}\rangle \in \{U(\theta_0)|0\rangle \mid 0 \leq \theta_0 \leq \pi\} \quad (5.2)$$

である. ここで,  $|x_{\text{exact}}\rangle$  は (5.1) の正規化された厳密解を量子状態とみなしたものである.

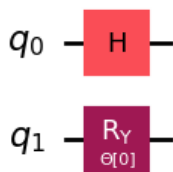


図 5.2. Ansatz  $U(\theta_0)$

### 5.1.2 右辺ベクトル $b$ の量子状態へのエンコード

右辺ベクトル  $b$  の正規化されたベクトルを量子状態へエンコードする量子回路  $U_b$  は図 5.3 の通りである.

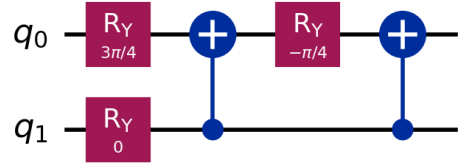


図 5.3.  $|b\rangle$  をエンコードする量子回路  $U_b$

### 5.1.3 量子計算機による VQLS 実行結果

以上の設定のもとで, 方程式 (5.1) に対し, イオントラップ型量子計算機の実機を用いて VQLS を実行した. 最適化諸元と検証ケースは次の通りである.

- 最適化
  - アルゴリズム: Nelder-Mead 法
  - 初期値:  $\theta_0 = 1.25$
  - 関数最大呼出回数: maxfev=10, 20
- Shot 数
  - shots=1000, 2500
- 検証ケース
  - maxfev=10, shots=1000
  - maxfev=10, shots=2500
  - maxfev=20, shots=1000

最適化繰返し数とケース毎のコスト関数の測定値および厳密なコスト関数最小値のプロットは図 5.4 である.

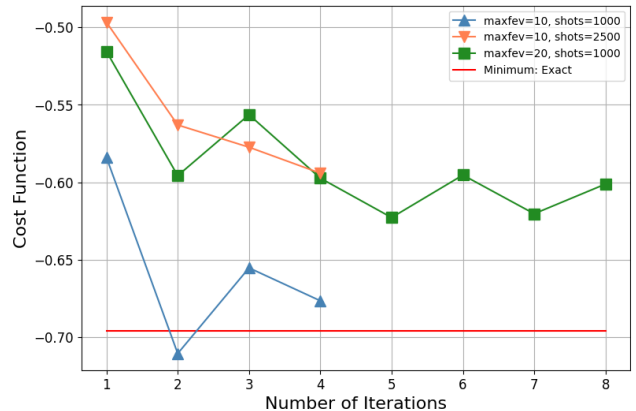


図 5.4. 繰返し数とコスト関数の測定値  
コスト関数の厳密値とそれぞれの最適化結果のプロットは図 5.5 である.

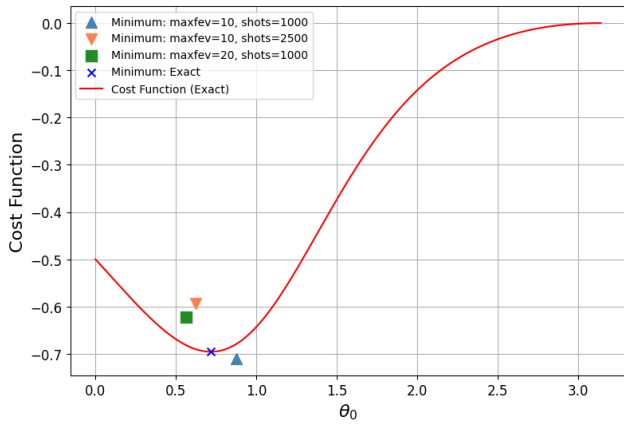


図 5.5. 最適化のプロット

最適化で得られたパラメータ  $\theta_0$  を用いてシミュレータによる解の確率振幅の比較および厳密解に対する精度の比較は次の通りである。

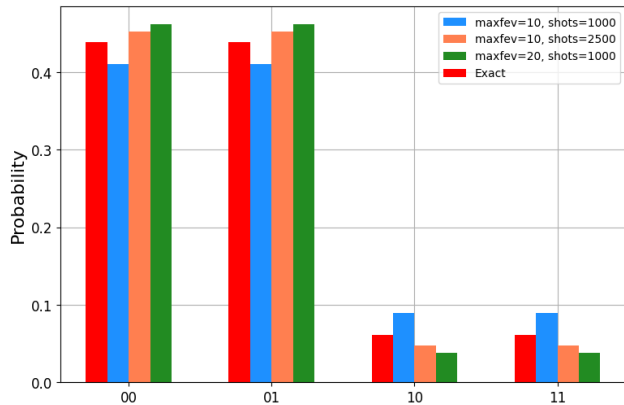


図 5.6 解の確率振幅

表 5.7 厳密解との精度比較

検証ケース (maxfev,shots)	忠実度	相対誤差 ( $\times 10^{-2}$ )	QPU 実行時間
(10,1000)	0.99381	7.9656	18m50s
(10,2500)	0.99786	5.1335	38m24s
(25,1000)	0.99400	8.8132	39m09s

### 5.2 2次元 Poisson 方程式

$\Omega = [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  とし、次の混合境界条件を持つ Poisson 方程式の解  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  を見つける問題を考える。

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{in } \Omega, \\ u = 0, & \text{on } \{(x, y) \in \Omega \mid x = 0, 1\}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \text{on } \{(x, y) \in \Omega \mid y = 0, 1\}. \end{cases}$$

ここで、 $f: \Omega \ni (x, y) \mapsto 2\pi^2 \sin \pi x \cos \pi y \in \mathbb{R}$  である。この方程式は一意解を持ち、解  $u(x, y) = \sin \pi x \cos \pi y$  である。以下ではこの問題に対し、差分法を用いて近似解を求める。図 5.8 のように領域  $\Omega$  を分割し、この分割の格子点を節点とする。

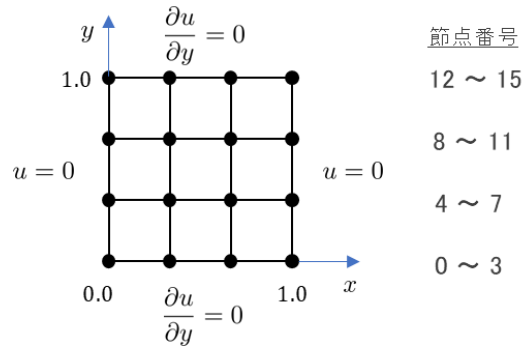


図 5.8. Poisson 方程式の領域分割

この分割に対する差分法の係数行列は、

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ B^\top & A_2 \end{pmatrix}$$

である。ただし、

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。

右辺ベクトル  $b$  と方程式

$$A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{15} \end{pmatrix} = b \tag{5.3}$$

の厳密解  $x_{\text{exact}} = A^{-1}b$  はそれぞれ

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.8994 \\ -1.8994 \\ 0 \\ 0 \\ -0.9497 \\ -0.9497 \\ 0 \\ 0 \\ 0.9497 \\ 0.9497 \\ 0 \\ 0 \\ 1.8994 \\ 1.8994 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\text{exact}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2210 \\ 1.2210 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5427 \\ 0.5427 \\ 0 \\ 0 \\ -0.5427 \\ -0.5427 \\ 0 \\ 0 \\ -1.2210 \\ -1.2210 \\ 0 \end{pmatrix}$$

である。

### 5.2.1 Ansatz

境界条件と  $f$  の対称性より、

- $x_0 = x_3 = x_4 = x_7 = x_8 = x_{11} = x_{12} = x_{15} = 0$ ,
- $x_1 = x_2 \geq 0, x_{13} = x_{14} = -x_1$ ,
- $x_5 = x_6 \geq 0, x_9 = x_{10} = -x_5$

と仮定してよい。これに基づいて図 5.8 によって定める ansatz  $(U(\theta_0))_{\theta_0 \in [0, \pi]}$  を採用する。このとき、

$$|x_{\text{exact}}\rangle \in \{U(\theta_0)|0\rangle \mid 0 \leq \theta_0 \leq \pi\} \quad (5.4)$$

である。ここで、 $|x_{\text{exact}}\rangle$  は (5.3) の正規化された厳密解を量子状態とみなしたものである。

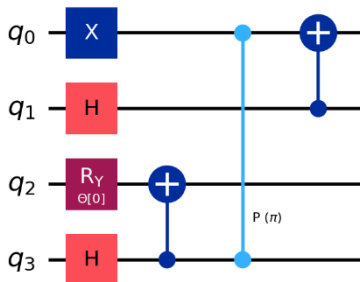


図 5.8. Ansatz  $U(\theta_0)$

### 5.2.2 方程式の変形

係数行列  $A$  は対称ではないので、(5.3) の両辺に  $A^\top$  をかけて

$$A^\top Ax = A^\top b \quad (5.3)'$$

と変形し、この方程式の解を求める。(5.3)' の係数行列  $A^\top A$  は正定値実対称行列である。

### 5.2.3 右辺ベクトル $A^\top b$ の量子状態へのエンコード

右辺ベクトル  $A^\top b$  の正規化されたベクトルを量子状態へエンコードする量子回路  $U_b$  は図 5.9 の通りである。

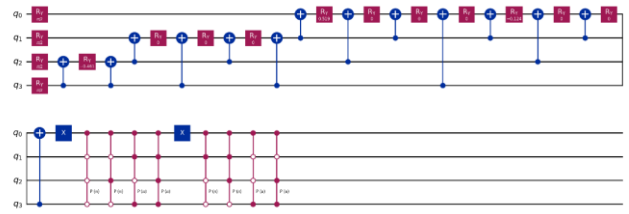


図 5.9.  $|A^\top b\rangle$  をエンコードする量子回路  $U_b$

### 5.2.4 量子計算機による VQLS 実行結果

以上の設定のもとで、方程式 (5.3)' に対し、イオントラップ型量子計算機の実機を用いて VQLS を実行した。最適化諸元と検証ケースは次の通りである。

- 最適化
  - アルゴリズム: Nelder-Mead 法
  - 初期値:  $\theta_0 = 2$
  - 関数最大呼出回数: maxfev=10
- Shot 数
  - shots=1000
- 検証ケース
  - maxfev=10, shots=100

最適化繰返し数とケース毎のコスト関数の測定値および厳密なコスト関数最小値のプロットは図 5.9 である。

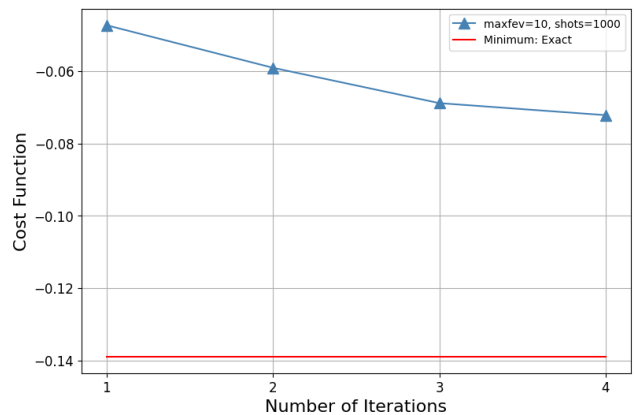


図 5.9. 繰返し数とコスト関数の測定値

コスト関数の厳密値とそれぞれの最適化結果のプロットは図 5.10 である。

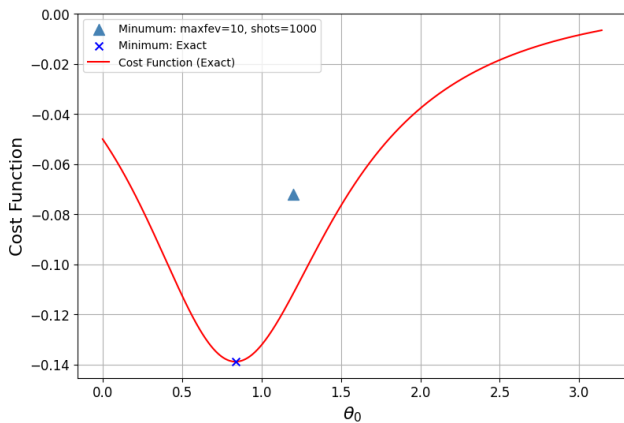


図 5.10. 最適化のプロット

最適化で得られたパラメータ  $\theta_0$  を用いてシミュレータによる解の確率振幅の比較および厳密解に対する精度の比較は次の通りである。

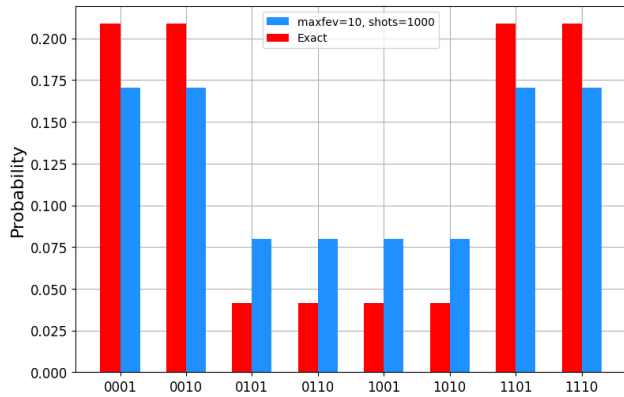


図 5.11 解の確率振幅

表 5.12 厳密解との精度比較

検証ケース (maxfev,shots)	忠実度	相対誤差 ( $\times 10^{-2}$ )	QPU 実行時間
(10,1000)	0.96732	2.6305	56m30s

## 6. 結論

本論文では、NISQ 量子計算の応用として、2つの具体的な問題をイオントラップ型の量子計算機を用いて解くことを検証した。1つは有限要素法、もう1つは差分法でそれぞれ連立方程式を導き、それらの近似解を VQLS によって求めた。その結果、それぞれ連立方程式の厳密解に対して、2次元静磁場解析では忠実度 99%、2次元 Poisson 方程式では忠実度 96%の近似解を得ることができ、良好であった。

また、2次元静磁場解析においては最大関数呼出回数と shot 数との組合せによる3つのケースを検証した。今回の検証では、shot 数を大きくしたケースが最良の精度を示す結果となった。これは問題の特性からパラメータ数を最小限に抑えられたことで、比較的早い段階でコスト関数の値が収束し、そのため関数呼出回数を大きくするよりも測定の統計的な誤差を小さくし得る shot 数を大きくした方が最

適化に対して効果的であったためであると考えられる。また、計算や測定の過程でノイズの影響を受け、測定で得られたコスト関数の値は厳密値からいくらか乖離するものの、この影響はコスト関数の増減や凹凸等の全体的な形を大きく変えることはなく、そのため最適化に対して大きな影響を与えなかったと考えられる。

### 参考文献

- [1] Bravo-Prieto, C., LaRose, R., Cerezo, M., Subasi, Y., Cincio, L. and Coles, P. J., Variational Quantum Linear Solver, *Quantum* 7, 1188, 2023.
- [2] Brezis, H., *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2011.
- [3] Dervovic, D., Herbster, M., Mountney, P., Severini, S., Usher, N. and Wossnig, L., Quantum linear systems algorithms: a primer, arxiv:1802.08227, 2018.
- [4] Sato, S., Kondo, R., Koide, S., Takamatsu, H. and Imoto, N., Variational quantum algorithm based on the minimum potential energy for solving the Poisson equation, *Phys.Rev.A* 104, 052409, 2021.
- [5] 中田高義, 高橋則雄, 「電気工学の有限要素法」, 第2版, 森北出版, 1986.