

膀胱内蓄尿量予測のための非線形微分方程式モデルの差分化手法の違いにおける
数値解精度の比較

Comparison of numerical solution accuracies of different difference methods of non-linear
differential equation models for predicting urinary storage in the bladder.

塩田 崇真[†] 浜田 百合[†] 栗原陽介[†]
Soma Shiota Yuri Hamada Yosuke Kurihara

1. はじめに

介護施設において、高齢者の尿失禁対策が課題となっている。介護施設における高齢者は認知機能の低下により、尿意を感じにくくなることから尿失禁を引き起こしてしまう[1]。現場では、おむつやカテーテルにより対策しているものの、介助者の負担の増加や尿路感染症等、様々な課題が生じている[2][3]。また、超音波センサにより膀胱内蓄尿量を計測することで、適切なタイミングでの排泄を促す手法があるものの、超音波センサは患者、介護者ともに拘束性の高さなどが問題視されている。

これらのことから任意の時刻まで超音波センサで計測された蓄尿量の推移から、以降の蓄尿量の推移の予測ができると、以降は超音波センサを着用することなく蓄尿量の推移を知ることができ、超音波センサの着用を必要最小限にすることが可能となる。

筆者らはこれまで蓄尿量の推移を表す膀胱体積変動モデルを提案し、高い精度で超音波センサに追従できることが分かっている[4]。これより、本研究では膀胱内における蓄尿量の推移を、非線形微分方程式をモデルとし表す。その後、提案するモデルから異なる手法で差分方程式を求め、各手法における数値解による蓄尿量の推移と、解析解による蓄尿量の推移の精度を比較する。これにより、膀胱内蓄尿量の推移を予測する際に有効的な差分方程式を提案する。

2.1 モデル

差分方程式を算出するにあたり、筆者らが先行研究[4]にて提案した、膀胱体積変動モデルを以下に示す。以下の a_1 , a_2 は比例係数とし、膀胱内の蓄尿量を $x(t)$ とする。この時、膀胱内への尿の流量の積分により蓄尿量を表すことができると考える。これより、尿流量を $Q_b(t)$ とし、残尿量を x_0 とおくと、

$$x(t) = \int_0^t Q_b(t) dt + x_0 \quad (1)$$

と表わすことができる。

次に、膀胱壁について考えると膀胱内に尿が溜まり続けることで伸展が生じることが考えられる。これより、膀胱の体積は蓄尿量に比例すると考えられることから、膀胱体積を $V(t)$ とおくと、

$$V(t) = a_1 x(t) \quad (2)$$

と表わすことができ、この時の膀胱の伸展速度は膀胱体積に比例すると考えられるため、膀胱伸展速度を $\frac{dV(t)}{dt}$ とおくと、

$$\frac{dV(t)}{dt} = a_2 V(t) \quad (3)$$

と表わすことができる。

さらに、膀胱壁の伸展の限界 V_{max} 付近では流入する尿量
の速度は、0 に近づくことが考えられることから、

$$\frac{dV(t)}{dt} = a_2 V(t) \left\{ \frac{V_{max} - V(t)}{V_{max}} \right\} \quad (4)$$

(4)の式で表すことができる。

以上をまとめると、(5)式で表すことができる。

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_2 x(t) \left\{ 1 - \frac{x(t)}{\frac{V_{max}}{a_1}} \right\} \quad (5)$$

これより、膀胱内蓄尿量 $x(t)$ を導出するために、(5)式を $x(t)$ について微分すると、

$$x(t) = \frac{\frac{V_{max}}{a_1}}{1 + \left(\frac{V_{max}}{a_1 x_0} - 1 \right) e^{-a_2 t}} \quad (6)$$

(6)式のように変形できる。したがって、式(6)に含まれる V_{max} , x_0 , a_1 , a_2 の4つのパラメータを適切に設定することで蓄尿量モデルにより膀胱内に蓄積する尿量を予測することができる。

2.2 差分方程式

(6)式は連続時間システムであるため、本研究では差分方程式を2つの手法で求め、離散時間システムへと変換を行う。

2.2.1 4次のルンゲクッタ

1手法目は4次のルンゲクッタ法を用いて以下の s_1 , s_2 , s_3 , s_4 , により離散化する。

$$s_1 = f(t, x(t)) = a_2 x(t) \left\{ \frac{V_{max} - a_1}{V_{max}} \right\} dt \quad (7)$$

$$s_2 = f\left(t + \frac{dt}{2}, x(t) + \frac{s_1}{2}\right) = a_2 \left(x\left(t + \frac{dt}{2}\right) + \frac{s_1}{2}\right) \left\{ \frac{V_{max} - a_1 \left(x\left(t + \frac{dt}{2}\right) + \frac{s_1}{2}\right)}{V_{max}} \right\} dt \quad (8)$$

$$s_3 = f\left(t + \frac{dt}{2}, x(t) + \frac{s_2}{2}\right) = a_2 \left(x\left(t + \frac{dt}{2}\right) + \frac{s_2}{2}\right) \left\{ \frac{V_{max} - a_1 \left(x\left(t + \frac{dt}{2}\right) + \frac{s_2}{2}\right)}{V_{max}} \right\} dt \quad (9)$$

$$s_4 = f(t + dt, x(t) + s_3) = a_2 (x(t + dt) + s_3) \left\{ \frac{V_{max} - a_1 (x(t + dt) + s_3)}{V_{max}} \right\} dt \quad (10)$$

$$x(t + dt) = x(t) + \frac{1}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (11)$$

以上の(11)式を離散ステップにすると、以下の式となる。

$$x(k + 1) = x(k) + \frac{1}{6}(s_1 + 2s_2 + 2s_3 + s_4) \quad (12)$$

2.2.2 森下の手法

2手法目は以下の森下らの手法[5]により差分化を行う。

まず、以下の(13)式について考える。

$$\frac{x(t + dt) - x(t)}{x(t)} \quad (13)$$

[†] 青山学院大学 理工学部 経営システム工学科
Department of Industrial and Systems Engineering, College of
Science and Engineering, Aoyama Gakuin University

(13)式に膀胱体積変動モデルを代入し、式変形させると

$$\frac{x(t+dt) - x(t)}{x(t)} = \frac{\{1 + (e^{a_2 dt} - 1)\}x(t)}{1 + \frac{e^{a_2 dt}}{V_{max}}x(t)} \quad (14)$$

となり、離散化させると差分方程式は以下の式となる。

$$x(k+1) = \frac{\{1 + (e^{a_2 dt} - 1)\}x(k)}{1 + \frac{e^{a_2 dt}}{V_{max}}x(k)} \quad (15)$$

以上の(12)(15)の2式により数値解を算出し、それらと膀胱体積変動モデルにより算出される解析解の比較を行う。

3. 検証実験

本実験では、実験協力者がデータを取得する際、計測開始直前に排尿し、排尿直後から超音波センサにより膀胱内蓄尿量を計測する。協力者は、排尿間に水を飲まないグループ(G1)、水を飲むグループ(G2)に分かれる。G1では、排尿直後に水 300ml を摂取し、その後尿意を感じるまで安静状態を維持する。G2では、排尿直後に 200 ml を飲水し、20 分間安静した後、200ml, 150ml, 100ml のいずれかの量を飲水した後、再び安静状態を維持し、尿意を催したタイミングで排尿する。G1, G2 とも上記の手順を任意の回数繰り返し行う。実験協力者は排尿に問題のない 20 代男性 9 名を対象とし、計 194 データを取得した。また本実験は、青山学院大学倫理審査委員会による倫理審査を受け、承認を得たうえで行われた (承認番号 H21-004)。

k を 1 分毎の離散時間とし、 T_u は各データにおける排尿時刻とする。(6)式のモデルを真値と誤差の二乗和が最小になるように内点法を適用しパラメータを求め予測した蓄尿量推移を $x(k)$ ($k=1, 2, \dots, T_u$) とする。また、膀胱体積変動モデルから算出した差分方程式を $\hat{x}_r(k)$ ($k=1, 2, \dots, T_u$) とする。ここで、差分方程式から算出した蓄尿量推移 $\hat{x}_r(k)$ の精度は、以下の平均絶対誤差で定義する。

$$MAE = \frac{1}{T_u} \sum_{k=1}^{T_u} |\hat{x}_r(k) - x(k)| \quad (16)$$

4. 実験結果

図 1 に(12)(15)の2式により数値解を算出し、それらと膀胱体積変動モデルにより算出される解析解との誤差を MAE によって評価したものを片対数グラフで示す。

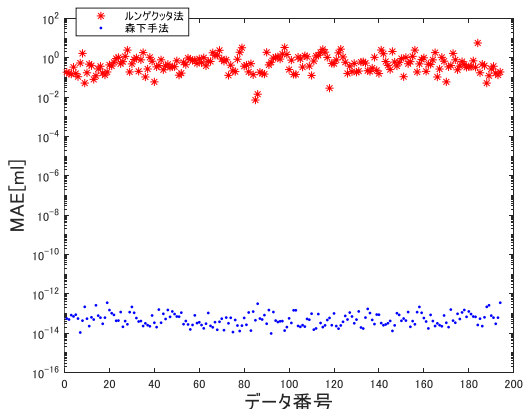


図 1 差分方程式の違いによる平均絶対誤差

図 1 より、ルンゲクッタ法により求めた差分方程式の MAE は 10^{-2} から 10^1 の範囲に停滞している一方、森下らの手法の差分方程式から算出した数値解は 10^{-14} から 10^{-12} の範囲にある。また、ルンゲクッタ法の MAE の平均は 0.74ml であるのに対し、森下らの手法の MAE の平均は 6.60×10^{-14} ml となっており、1%水準で有意差が見られた。これより、(15)式の差分方程式から数値解を算出する事により精度の高い解の算出が可能になることが確認された。

図 2 に、ルンゲクッタ法が解析解の推移に最も追従できなかったデータを示している。以下の図から分かるように(15)式の差分方程式は解析解にほとんど誤差無く追従しているのに対し、ルンゲクッタ法では多少の誤差が生じていることが分かる。

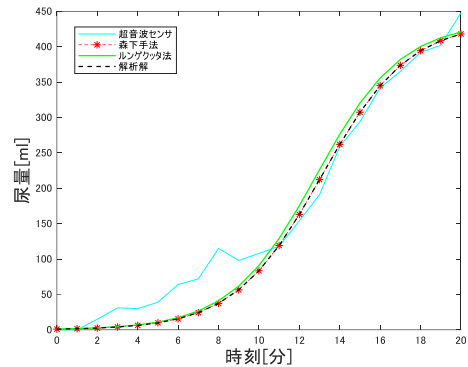


図 2 各手法による蓄尿量の推移

5. 考察

今回、森下らの手法がルンゲクッタ法を用いた時よりも精度が高くなった要因として、ルンゲクッタ法は過去の情報を用いない手法なのに対して、森下らの手法は過去の情報を用いて数値解を算出していたことが良い結果を得ることが出来た要因であると考えられる。

6. 結論

本研究では膀胱内蓄尿量モデルから 2 つの手法により差分方程式を求めた。その結果、ルンゲクッタ法の MAE の平均は 0.74ml であるのに対し、森下らの手法の MAE の平均は 6.60×10^{-14} ml となっており、森下らの手法の差分方程式から数値解を算出する事により精度の高い解の算出が可能になることを確認した。

今後は今回提案した手法に対し、パーティクルフィルタ等の状態観測器を適用することにより予測を行う必要があると考えられる。

参考文献

- [1] 大島伸一, 後藤百万, 吉川羊子, “平成 11 年度愛知県排尿障害実態調査報告書”, 愛知県, (2000).
- [2] Kaoru K, Keiko T, Atsuko N, “Low Back Load Produced by Changing a Diaper at Various Bed Heights Experienced by Female Care Workers in a Nursing Home”, J. Phys. Ther. Sci., Vol.25, Issue.4, pp.465-475, (2013).
- [3] Bryan CS, Reynolds KL, “Hospital-acquired bacteremic urinary tract infection: epidemiology and outcome”, J Urol, Vol.132, pp.494-398, (1984)
- [4] 塩田崇真, 浜田百合, 栗原陽介, “ロジスティック関数による膀胱内蓄尿量モデルの提案”, 電気情報通信学会, (2022)
- [5] Masaki Morishita, “The fitting of the logistic equation to the rate of increase of population density”, Researches on Population Ecology, Vol.7, pp.52-55, (1965)