F-039

位数 5 の Modular magic square の探索
Search for Modular magic squares of order 5

金谷 享侍†　　足立 智子†
Kyouji Kanaya　Tomoko Adachi

1. はじめに

Modular magic sudoku (以降は MMSu と記す)は、数独にある条件を付け加えたものである。数独のブロック(小方陣)に当たるものを、MMSu では Modular magic square (以降は MMSq と記す)と呼ぶ。Lorch and Weld[1]は、サイズが最小の場合に、MMSq と MMSu の特徴を明らかにした。足立・桑嶋[2]は、サイズが一般の場合に，ある条件を満たす MMSq から MMSu を構成する方法を発見した。しかし、サイズが 2 番目に小さい5×5の MMSq を 2 つしか発見できなかった。そこで、本研究では、サイズ5×5の MMSq を探索し、その特徴を調べた。

2. 用語の説明

2.1 ラテン方陣

nを正の整数とする。位数 n のラテン方陣とは、サイズ$n\times n$の方陣に n種類のシンボルを入れ、どの縦の列、横の行にもすべてのシンボルがちょうど 1 個ずつ出現するように配置したものである。例として、位数 5 のラテン方陣を図 1 に挙げる。本研究では、図 1(a)のラテン方陣をL_a型と呼び、図 1(b)のラテン方陣をL_b型と呼ぶことにする。

1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3
0	1	2	3	4

(a)L_a

3	1	4	2	0
4	2	0	3	1
0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4

(b) L_b

図 1　位数 5 のラテン方陣の例

2.2 Modular magic square (MMSq)

サイズ $n\times n$の方陣に、$0,1,\dots,n^2-1$の数を入れ、どの行の和、列の和、対角線の和も、n^2を法として 0 と合同になるように配置したものを、位数nの MMSq と呼ぶ。MMSq は魔方陣にはならないし、魔方陣は MMSq にはならない。

2.3 数独解

位数n^2の数独解(以降は数独と記す)とは,位数n^2のラテン方陣であり、サイズ$n\times n$のn^2個のブロックに全てのシンボルがちょうど 1 回ずつ出現するように配置したものである。以降は数独と呼ぶ。

† 静岡理工科大学情報学部コンピュータシステム学科
Department of Computer Science, Faculty of Informatics,
Shizuoka Institute of Science and Technology

2.4 Modular magic sudoku (MMSu)

位数n^2の MMSu とは、位数n^2の数独に、どの小方陣も位数nの MMSq になるという条件を付け加えたものである。MMSu では、nが 3 以上の奇数に限られる。シンボルは、$0,1,\dots,n^2-1$となる。

3. 既存の結果

3.1 Lorch and Weld の結果

Lorch and Weld [1]は、位数が最小の 9 の場合に MMSu の特徴を明らかにした。MMSu に含まれる MMSq は、各シンボルに mod 3 を施すと、主対角成分または歪対角成分のシンボルがすべて 0 のラテン方陣になる。例えば、図 2(a)は位数 9 の MMSu に含まれる MMSq である。この MMSq の各シンボルに mod 3 を施すと、図 2(b)のラテン方陣になる。これは、L_a型の位数$n=3$の場合である。

1	8	0
2	3	4
6	7	5

(a) MMSq

1	2	0
2	0	1
0	1	2

(b)MMSq mod 3

図 2　位数 3 の MMSq とその mod 3

3.2 足立・桑嶋の結果

足立・桑嶋[2]は、位数が 2 番目に小さい 25 の MMSu の特徴を調べるために、位数 5 の MMSq を調べた。位数 25 の MMSu の特徴は解明できなかったが、条件 2 を満たす位数nの MMSq から MMSu を構成する方法を発見した。

条件 1. 位数nの MMSq の各シンボルに mod n を施すと、L_a型のラテン方陣になる。

定義 1(写像h). 位数nの方陣Aを方陣$B=h(A)$へ移す写像 h を定義する。各セルのシンボルの対応を$b_{i,j}=h(a_{i,j})=a_{i-1,j+1}$と定める。但し、$i,j$の等号は、法$n$で合同とする。

条件 2. 条件 1 を満たす位数nの MMSq Aに写像hを施した方陣$B=h(A)$も、条件 1 を満たす MMSq になる。

図 3(a)は条件 1 を満たす位数 5 の MMSq であり、図 3(b)は図 3(a)に写像hを施した方陣である。この MMSq は条件 2 を満たしている。

16	2	8	14	10
7	23	4	15	1
13	19	20	11	12
9	0	21	17	3
5	6	22	18	24

(a)MMSq A

6	22	18	24	5
2	8	14	10	16
23	4	15	1	7
19	20	11	12	13
0	21	17	3	9

(b)$h(A)$

図 3　位数 5 のL_a型の MMSq と関連する方陣

4. 提案の手法

既存の研究では、MMSq の各シンボルに mod nを施すと、L_a型のラテン方陣になる場合のみを研究していた。しかし、$n \geq 5$の場合では、L_a型の他に、L_b型が存在する。そこで、本研究ではL_a型のラテン方陣になる MMSq だけではなく、L_b型のラテン方陣になる MMSq も探索する。条件 1, 2 をL_b型に適用したものが、次の条件 1', 2'である。

条件 1'. 位数 n の方陣において、配置された各シンボルを mod nを施すと、L_b型のラテン方陣になる。

定義 2(写像g). 位数nの方陣Aを方陣$B = g(A)$へ移す写像 g を定義する。各セルのシンボルの対応を$b_{i,j} = g(a_{i,j}) = a_{i-1,j+2}$と定める。但し、$i, j$の等号は、法$n$で合同とする。

条件 2'. 条件 1'を満たす位数nの MMSq A に写像g を施した方陣$B = g(A)$も、条件 1'を満たす MMSq になる。

図 4(a)は条件 1'を満たす位数 5 の MMSq であり、図 4(b)は図 4(a)に写像gを施した方陣である。この MMSq は条件 2'を満たしている。

MMSq を探索するプログラムを作成し、条件 1, 2, 1', 2'を満たす位数$n = 3, 5, 7$の MMSq を探索する。探索にあたり、第 1 行n列目のシンボルは 0 とする。

また、足立・桑嶋[2]による MMSu の構成法を用いて、条件 2'を満たす MMSq から MMSu を構成する。

23	11	14	2	0
4	7	5	13	21
10	3	6	19	12
16	9	17	15	18
22	20	8	1	24

(a) MMSq A

8	1	24	22	20
14	2	0	23	11
5	13	21	4	7
6	19	12	10	3
17	15	18	16	9

(b) $g(A)$

図 4 位数 5 のL_b型の MMSq と関連する方陣

5. 結果

表 1, 2, 3 はプログラムの実行結果である。表 1, 2 における位数 5 の条件なしの探索、表 1, 2 における位数 7 の探索、表 3 における位数 7 の条件なしの探索は、数時間経過してもプログラムが終了しなかったため、実行を中断した。本研究により、位数 5 の条件付きのすべての MMSq が探索でき、位数 7 の条件付きのある 1 個の MMSq が探索できた。

表 1 は条件を満たす位数 3 と位数 5 の MMSq の個数である。位数 3 の場合は、条件 1 を満たすときは常に条件 2 も満たしている。位数 5 の場合は、条件 1'のほうが条件 1 よりも数が多いが、条件 2, 2'の場合は数が同じになった。

表 2 は探索にかかった CPU の計算時間である。条件 1 よりも条件 1'のほうが探索に時間がかかった。条件 2'が条件 2 よりも探索に時間がかからなかった理由は、条件 1'が条件 1 よりも数が少ないからだと考えられる。

表 3 はある 1 個の MMSq を見つけるまで探索した CPU の計算時間である。条件 1, 2 よりも条件 1', 2'のほうが探索に時間がかかった。また、条件が追加されている条件 2, 2'のほうが条件 1, 1'と比べて時間がかかった。

図 5 は条件 2'を満たす MMSq の 1 つである図 4(a)から構成した MMSu である。探索した条件 2'を満たす MMSq から MMSu を構成することができた。

表 1 MMSq の個数[個]

n	条件なし	条件1	条件2	条件1'	条件2'
3	72	6	6		
5	30万以上	40500	18000	22500	18000

表 2 MMSq の探索時間[秒]

n	条件なし	条件1	条件2	条件1'	条件2'
3	0.0036	0.0002	0.0004		
5	1万以上	56.974	51.122	64.713	29.736

表 3 ある 1 個の MMSq の探索時間[10^{-3}秒]

n	条件なし	条件1	条件2	条件1'	条件2'
3	3.615	0.234	0.438		
5	6408.473	0.432	0.433	0.462	0.489
7	360万以上	32.715	3692.50	4104.11	14155.85

23	11	14	2	0	8	1	24	22	20	18	16	9	17	15	3	6	19	12	10	13	21	4	7	5
4	7	5	13	21	14	2	0	23	11	24	22	20	8	1	9	17	15	18	16	19	12	10	3	6
10	3	6	19	12	5	13	21	4	7	0	23	11	14	2	20	8	1	24	22	15	18	16	9	17
16	9	17	15	18	6	19	12	10	3	21	4	7	5	13	11	14	2	0	23	1	24	22	20	8
22	20	8	1	24	17	15	18	16	9	12	10	3	6	19	7	5	13	21	4	2	0	23	11	14
8	1	24	22	20	18	16	9	17	15	3	6	19	12	10	13	21	4	7	5	23	11	14	2	0
14	2	0	23	11	24	22	20	8	1	9	17	15	18	16	19	12	10	3	6	4	7	5	13	21
5	13	21	4	7	0	23	11	14	2	20	8	1	24	22	15	18	16	9	17	10	3	6	19	12
6	19	12	10	3	21	4	7	5	13	11	14	2	0	23	1	24	22	20	8	16	9	17	15	18
17	15	18	16	9	12	10	3	6	19	7	5	13	21	4	2	0	23	11	14	22	20	8	1	24
18	16	9	17	15	3	6	19	12	10	13	21	4	7	5	23	11	14	2	0	8	1	24	22	20
24	22	20	8	1	9	17	15	18	16	19	12	10	3	6	4	7	5	13	21	14	2	0	23	11
0	23	11	14	2	20	8	1	24	22	15	18	16	9	17	10	3	6	19	12	5	13	21	4	7
21	4	7	5	13	11	14	2	0	23	1	24	22	20	8	16	9	17	15	18	6	19	12	10	3
12	10	3	6	19	7	5	13	21	4	2	0	23	11	14	22	20	8	1	24	17	15	18	16	9
3	6	19	12	10	13	21	4	7	5	23	11	14	2	0	8	1	24	22	20	18	16	9	17	15
9	17	15	18	16	19	12	10	3	6	4	7	5	13	21	14	2	0	23	11	24	22	20	8	1
20	8	1	24	22	15	18	16	9	17	10	3	6	19	12	5	13	21	4	7	0	23	11	14	2
11	14	2	0	23	1	24	22	20	8	16	9	17	15	18	6	19	12	10	3	21	4	7	5	13
7	5	13	21	4	2	0	23	11	14	22	20	8	1	24	17	15	18	16	9	12	10	3	6	19
13	21	4	7	5	23	11	14	2	0	8	1	24	22	20	18	16	9	17	15	3	6	19	12	10
19	12	10	3	6	4	7	5	13	21	14	2	0	23	11	24	22	20	8	1	9	17	15	18	16
15	18	16	9	17	10	3	6	19	12	5	13	21	4	7	0	23	11	14	2	20	8	1	24	22
1	24	22	20	8	16	9	17	15	18	6	19	12	10	3	21	4	7	5	13	11	14	2	0	23
2	0	23	11	14	22	20	8	1	24	17	15	18	16	9	12	10	3	6	19	7	5	13	21	4

図 5 条件 2'を満たす MMSq から構成した MMSu

6. おわりに

今回作成したプログラムは、位数 7 の場合は実行時間が膨大になり、条件付きのある 1 個の MMSq しか探索できなかった。よって、位数 7 以上の MMSq を調べるためには、探索アルゴリズムの効率化が課題となる。

参考文献

[1] John Lorch and Ellen Weld, “Modular magic sudoku”, INVOLVE, vol.5, no.2, pp.173-186 (2012).

[2] 足立智子, 桑嶋大地, “Modular magic sudoku の構成”, 日本応用数理学会 第 17 回研究部会連合発表会, オンライン開催, 2021.