

内部3連結 cubic 平面グラフの最少線分外4角格子凸描画

Minimum-Segment Convex Grid Drawings with Tetragonal Contours of Internally Triconnected Cubic Plane Graphs

三浦 一之*

Kazuyuki Miura

概要

平面グラフ G の凸描画においては、全ての辺は交差しない直線分で描かれ、全ての面は凸多角形で描かれる。 G の凸描画で、各点が整数座標を持つものを格子凸描画という。 G の凸描画で、極大線分の数が最少となるものを最少線分凸描画という。 G の最少線分凸描画で、各頂点が整数格子点上にあるものを最少線分格子凸描画という。 G の最少線分格子凸描画で、外形が k 角形であるものを、 G の最少線分外 k 角格子凸描画という。 n を G の点数としよう。 G が 3 連結 cubic グラフならば、 G は大きさ $(3n/2 + 1) \times (5n/2 + 1)$ の整数格子内に、線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できることが知られている。さらに、内部 3 連結 cubic グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ が 2 枚あるいは 3 枚の葉を持つならば、 G は大きさ $n \times n$ の整数格子内に線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できることが知られている。

本論文では、内部 3 連結 cubic グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ がちょうど 4 枚の葉を持つならば、 G は大きさ $n^2 \times n^2$ の整数格子内に最少線分外 4 角格子凸描画できることを証明するとともに、そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。

れている [9]。さらに、内部 3 連結 cubic グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ が 2 枚あるいは 3 枚の葉を持つならば、 G は大きさ $n \times n$ の整数格子内に線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できることが知られている [10]。しかし、 $T(G)$ が 4 枚以上の葉を持つときに、 G が最少線分格子凸描画できるかどうかは知られていない。

本論文では、内部 3 連結 cubic グラフ G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ がちょうど 4 枚の葉を持つならば、 G は大きさ $n^2 \times n^2$ の整数格子内に最少線分外 4 角格子凸描画できることを証明するとともに、そのような描画を求める線形時間アルゴリズムを与える。図 1(a) および (d) に本アルゴリズムの入力と出力の例を示す。

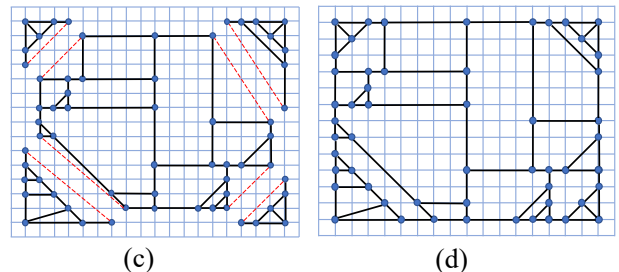
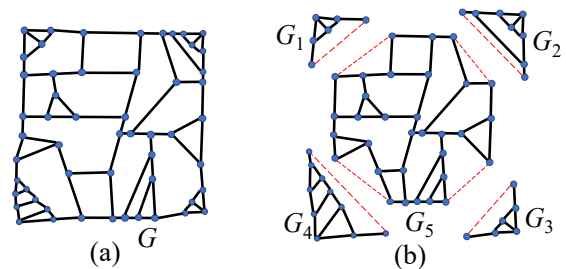


図 1: (a) 内部 3 連結 cubic グラフ G , (b) G の部分グラフ G_1, G_2, G_3, G_4 および G_5 , (c) G_1, G_2, G_3, G_4 および G_5 の最少線分格子凸描画, (d) G の最少線分外 4 角格子凸描画。

1 序論

近年、様々な分野で与えられたグラフ、特に平面グラフを「構造を理解しやすく」かつ「きれいに」描画する手法が求められている [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]。平面グラフ G の描画で、 G の各辺が交差の無い直線分として描かれたものを直線描画という。 G の直線描画で、全ての面が凸多角形であるものを G の凸描画という。 G の凸描画で、 G の各点が整数座標を持つものを G の格子凸描画という。なお、本論文ではグラフ G の点数を n で表す。また、大きさ $W \times H$ の整数格子は $W + 1$ 本の垂直線分と $H + 1$ 本の水平線分およびそれらの交点からなり、その外周は矩形であるとする。任意の 3 連結平面グラフは $(n - 2) \times (n - 2)$ の大きさの整数格子内に線形時間で格子凸描画できることが知られている [3]。近年、凸描画および格子凸描画に更なる制約を加えたより見やすい描画法の研究が行われている [6]。本論文では、その中の一つである最少線分格子凸描画を扱う。

Γ を G の直線描画とする。 Γ において、点 v に接続する連続した 2 辺がなす角を θ_v と書く。 $\theta_v = 180^\circ$ ならば、 θ_v を平角という。 Γ における辺集合 S が、 Γ において直線分となる極大な集合であるならば、 S を極大線分という。図 1(c) のように、 G の凸描画で、極大線分の数が最少となるものを G の最少線分凸描画という。最少線分凸描画は、単なる凸描画よりも見やすい場合が多い [6]。 G の最少線分凸描画で、しかも格子凸描画であるものを G の最少線分格子凸描画という。 G の最少線分格子凸描画で、外形が k 角形であるものを、 G の最少線分外 k 角格子凸描画という。全ての頂点の次数が 3 となるグラフを cubic グラフという。 G が 3 連結 cubic グラフならば、 G は大きさ $(3n/2 + 1) \times (5n/2 + 1)$ の整数格子内に、線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できることが知ら

2 準備

本節では、いくつかの定義と既知の補題を与える。グラフ G は点の集合 V と辺の集合 E からなり、 $G = (V, E)$ で表す。辺交差なしに描画できるグラフを平面グラフという。グラフの頂点 v に接続する辺の数を次数といい、 $d(v)$ と書く。全ての頂点の次数が 3 となるグラフを cubic グラフという。2 連結平面グラフ G において、点の対 $\{u, v\}$ を G から取り除い

*福島大学大学院 共生システム理工学研究科

た結果, グラフ G が非連結となるならば $\{u, v\}$ を分離対という. グラフ G が分離対を持たないならば, 2 連結グラフ G は **3 連結** であるという. G の任意の分離対 $\{u, v\}$ に対して, u, v が共に外点であり, $G - \{u, v\}$ の各々の連結成分が外点を含むならば, 2 連結平面グラフ G は **内部 3 連結** であるという. $G = (V, E)$ を 2 連結グラフとし, u, v を G の分離対とする. このとき, G は以下の 2 つの条件 (a), (b) を満たすような 2 つのグラフ $G'_1 = (V_1, E'_1)$ と $G'_2 = (V_2, E'_2)$ を持つ.

- (a) $V = V_1 \cup V_2, V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$;
 (b) $E = E'_1 \cup E'_2, E'_1 \cap E'_2 = \phi, |E'_1| \geq 2, |E'_2| \geq 2$.

G の分離対 $\{u, v\}$ について, $G_1 = (V_1, E'_1 + (u, v))$ と $G_2 = (V_2, E'_2 + (u, v))$ を, $\{u, v\}$ に関する G の **分離グラフ** という. G_1 と G_2 に加えられる新しい辺 (u, v) は, **仮想辺** と呼ぶ. G が多重辺を持っていないとしても, G_1 と G_2 は多重辺を持つかもしれない. グラフ G を 2 つの分離グラフ G_1 と G_2 に分けることを, **分離** という. 2 つの分離グラフ G_1 と G_2 を再び組み合わせ G を構成することを, **結合** という. つまり, 結合は分離の逆である. 図 2(a) のように, 分離グラフをさらに分離する, という操作をそれ以上分離できなくなるまで繰り返す. このようにして出来るグラフを G の **分離成分** という [5, 7]. 図 1(a) のグラフ G は, 図 2(a) のように, 16 個の分離成分を持つ. G の分離成分は, 次の 3 つのいずれかである (1) 3 連結グラフ; (2) 3 本の多重辺 (2 点が 3 本の辺で繋がれているもの); (3) 三角形 (長さ 3 の面閉路). G の分離成分のうち, 3 本の多重辺を可能な限り組み合わせ一組の多重辺を構成し, 三角形を可能な限り組み合わせ閉路を構成することにより得られるものを G の **3 連結成分** という [5, 7]. G の 3 連結成分は, 次の 3 つのいずれかである: (a) 3 連結グラフ; (b) 多重辺; (c) 閉路. 分離成分は一通りとは限らないが, 3 連結成分は一通りである [5]. 図 1(a) のグラフ G は, 図 2(b) のように, 11 個の 3 連結成分を持つ.

図 2(c) のように, 各点が G の各 3 連結成分 H_i に対応し, H_i と H_j が同じ分離対に関する 3 連結成分であるときかつそのときのみ辺 $(H_i, H_j) (i \neq j)$ を持つ木 $T(G)$ を考える. $T(G)$ を **3 連結成分分解木** または単に G の **分解木** と呼ぶ. $l(G)$ によって, $T(G)$ の葉の数を示す. 図 2(c) のように, 図 1(a) のグラフ G に対して, $l(G) = 4$ である. G が 3 連結ならば, $T(G)$ は一つの独立した点となり, $l(G) = 1$ となる.

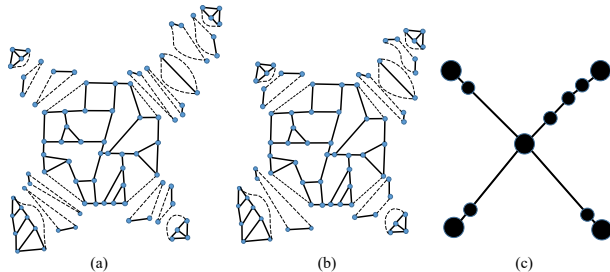


図 2: (a) 図 1(a) のグラフ G の分離成分 (b) G の 3 連結成分, (c) 分解木 $T(G)$.

以下の補題が知られている.

補題 2.1 [6] G を 3 連結 cubic 平面グラフとし, Γ を G の凸描画とする. このとき, Γ の平角の数は高々 $n - 3$ であり, 極大線分の数は少なくとも $n/2 + 3$ である.

補題 2.2 [9] G を n 点からなる 3 連結 cubic 平面グラフとする. このとき G は高々 $(3n/2 + 1) \times (5n/2 + 1)$ の整数格子内に, 線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できる.

補題 2.3 [10] G を n 点からなる内部 3 連結 cubic 平面グラフとし, G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ が 2 枚あるいは 3 枚の葉を持つとする. このとき G は高々 $n \times n$ の整数格子内に線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できる.

3 アルゴリズム

本節ではアルゴリズムの概略を述べるとともに, 本論文の主定理を与える.

本アルゴリズムは [9] および [10] のアルゴリズムを一部改良したものである. まず, 図 1(b) のように, 入力グラフ G を, $T(G)$ の 4 つの葉に対応する部分グラフ G_1, G_2, G_3 および G_4 と, それらを取り除いた部分グラフ G_5 に分割する. 次に, 図 1(c) のように, [10] のアルゴリズムを用いて G_1, G_2, G_3 および G_4 の最少線分格子凸描画を求める. さらに, 図 1(c) のように, [9] および [10] のアルゴリズムを改良して, G_5 の最少線分格子凸描画を求める. 最後に, 図 1(d) のように, 5 つの描画を組み合わせ G の最少線分外 4 角格子凸描画を求める. 補題 2.3 より, G_1, G_2, G_3 および G_4 は線形時間で最少線分外 3 角格子凸描画できることがわかる. また, G_5 の描画についても, 外形の角となる点以外の全ての点がちょうど 1 つの平角を持つように描画できることを証明できる. 詳細については省略する.

次の主定理が成り立つ.

定理 1 G を n 点からなる内部 3 連結 cubic 平面グラフとし, G の 3 連結成分分解木 $T(G)$ がちょうど 4 枚の葉を持つとする. このとき G は高々 $n^2 \times n^2$ の整数格子内に線形時間で最少線分外 4 角格子凸描画できる.

謝辞

この研究は栢森情報科学振興財団の助成を受けて遂行された.

参考文献

- [1] N. Chiba, K. Onoguchi and T. Nishizeki, *Drawing planar graphs nicely*, Acta Inform., 22, pp.187-201 1985.
- [2] N. Chiba, T. Yamanouchi and T. Nishizeki, *Linear algorithms for convex drawings of planar graphs*, in Progress in Graph Theory, J.A. Bondy and U.S.R. Murty (eds.), Academic Press, pp.153-173 1984.
- [3] M. Chrobak and G. Kant, *Convex grid drawings of 3-connected planar graphs*, International Journal of Computational Geometry and Applications, 7, pp.211-223 1997.
- [4] V. Dujmovic, D. Eppstein, M. Suderman and D. R. Wood, *Drawings of planar graphs with few slopes and segments*, Computational Geometry: Theory and Applications, 38(3), pp.194-212, 2007.
- [5] J. E. Hopcroft and R. E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components*, SIAM J. Compt., 2, pp. 135-158, 1973.
- [6] D. Mondal, R. I. Nishat, S. Biswas and M. S. Rahman, *Minimum-segment convex drawings of 3-Connected cubic plane graphs*, Journal of Combinatorial Optimization-JCO, pp.1-21, 2011.
- [7] T. Nishizeki and Md. S. Rahman, *Planar Graph Drawing*, World Scientific, Singapore 2004.
- [8] M. A. H. Samee, M. J. Alam, M. A. Adnan and M. S. Rahman, *Minimum-segment drawings of series-parallel graphs*, In 16th International Symposium on Graph Drawing, LNCS 5417, pp.408-419, 2009.
- [9] 三浦 一之, 3 連結 cubic 平面グラフの最少線分格子凸描画, Forum on Information Technology (FIT2016), Vol.1, No 1, pp.80-81, (2016).
- [10] 三浦 一之, 内部 3 連結 cubic 平面グラフの最少線分格子凸描画, Forum on Information Technology (FIT2022), Vol.1, No 1, pp.115-116, (2022).