A-033

外トーナメントに対する最小単一連結除去集合を求める多項式時間アルゴリズム
Polynomial-time algorithm of finding minimum singly-connected vertex deletion for out-tournaments

谷井　悠馬[1)]　　山田　敏規[1)]
Yuma Tanii　Toshinori Yamada

1　はじめに

小文を通して D を有向グラフとし，$V(D)$ と $A(D)$ をそれぞれ D の点集合と有向辺集合とする．u から v への D の有向辺を (u,v) で表す．$v_0, v_1, \ldots, v_k \in V(D)$ (k は 0 以上の整数) とする．任意の非負整数 $i < k$ に対して $(v_i, v_{i+1}) \in A(D)$ であるとき，点列 $P = (v_0, v_1, \ldots, v_k)$ を D 上の (v_0, v_k)-歩道，もしくは単に歩道と呼ぶ．さらに，$v_0, v_1, \ldots, v_k$ がすべて異なるならば P を (v_0, v_k)-パス (もしくは単にパス)，$v_0 = v_k$ を除いて $v_0, v_1, \ldots, v_k$ がすべて異なるならば P を閉路と呼ぶ．P の長さを k と定義する．

任意の頂点集合 $S \subset V(D)$ に対して，S のすべての頂点と S の点と接続するすべての有向辺を D から取り除くことによって得られる有向グラフを $D - S$ で表す．また，$D - \bar{S}$ を $D[S]$ によって表す．ここで，$\bar{S} = V(D) - S$ である．任意の 2 点 $u, v \in V(D)$ に対して D 上の (u,v)-パスが高々 1 本しか存在しないとき，D は単一連結であると言われる．また，D が閉路を持たないならば，D を有向無閉路グラフ (DAG, directed acyclic graph) と呼ぶ．ここで，以下の問題を考える：

問題 1（最小単一連結除去集合問題）
入力: 有向グラフ D
仕事: $D - S$ が単一連結であり (このような S を単一連結除去集合と呼ぶ)，$|S|$ が最小であるような $S \subset V(D)$ を求めよ．

最小単一連結除去集合問題は NP-困難であることが知られている [2]．そこで小文では，最小単一連結除去集合問題が多項式時間で解けるグラフのクラスについて考える．

D の任意の 2 頂点間にちょうど 1 本の有向辺が存在するとき，D をトーナメントと呼ぶ．任意の頂点 $v \in V(D)$ に対して v の外近傍 $N^+_D(v)$ と内近傍 $N^-_D(v)$ を次のように定義する：

$$N^+_D(v) = \{u \in V(D) \mid (v,u) \in A(D)\};$$
$$N^-_D(v) = \{u \in V(D) \mid (u,v) \in A(D)\}.$$

また，$\deg^+_D(v) = |N^+_D(v)|$ と $\deg^-_D(v) = |N^-_D(v)|$ をそれぞれ v の出次数と入次数と呼ぶ．D の任意の頂点 v に対して $D[N^+_D(v)]$ ($D[N^-_D(v)]$) がトーナメントであるならば，D を外トーナメント (内トーナメント) と呼ぶ．D が外トーナメントかつ内トーナメントであるならば，D を局所トーナメントと呼ぶ．文献 [1] において，以下の定理が示されている：

定理 1　[1] D が有向無閉路グラフであり，局所トーナメントであるならば，最小単一連結除去集合問題は $O(n^3)$ で解ける．ここで，$n = |V(D)|$ である．

小文では，次の定理を示す．

定理 2　D が有向無閉路グラフであり，外トーナメント (もしくは内トーナメント) であり，ハミルトンパス (すべての点を含むパス) を持つならば，最小単一連結除去集合問題は線形時間で解ける．

ここで，D が有向無閉路グラフであり，局所トーナメントであるならば，D はハミルトンパスを持つことに注意されたい．したがって，定理 2 は次の 2 点で定理 1 の一般化となっている：多項式時間で解くことができるグラフのクラスを拡張している；アルゴリズムの時間計算量を $O(n^3)$ から線形時間に高速化している．

2　提案アルゴリズム

D の各頂点には予めハミルトンパスの出現順に $1, 2, \ldots, n$ の番号がつけられていると仮定する：D は閉路を持たないと仮定しているので，D のトポロジカルソート (任意の $(u,v) \in A(D)$ において $u < v$ となるような有向グラフ D の頂点への番号付け) を求めることによって，D がハミルトンパスを持つか否かの判定と頂点へのハミルトンパスの出現順の番号付けを行うことができる．これは線形時間で行うことができることが知られている．

Algorithm 1 最小単一連結除去集合問題を解くアルゴリズム

```
for v ← 1 to n do
    S[v] ← False
    next[v] ← ∞
    for all u ∈ N_D^-(v) do
        if S[u] = False and next[u] ≠ ∞ then
            S[v] ← True
        end if
    end for
    if S[v] = False then
        for all u ∈ N_D^-(v) do
            if S[u] = False then
                next[u] ← v
            end if
        end for
    end if
end for
```

3　アルゴリズムの正当性と時間計算量

$S = \{v \in V(D) : S[v] = True\}$ とする．また，任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $V_i = \{1, 2, \ldots, i\}$, $S_i = V_i \cap S$ とする．このとき，以下の補題を示す．

1)　埼玉大学 大学院理工学研究科. Graduate School of Science and Technology, Saitama University

補題 1　任意の $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $G_i = D[V_i] - S_i$ とおくと，G_i に対して以下の 3 つが成り立つ：

- 任意の $v \in V(G_i)$ に対して $\deg_{G_i}(v) \leq 1$;
- 任意の $v \in V(G_i)$ に対して，$next[v] \neq \infty$ であるための必要十分条件は $\deg_{G_i}(v) = 1$;
- $\deg_{G_i}(v) = 1$ であるとき，$(v, next[v]) \in A(G_i)$.

証明: i に関する帰納法により証明する．$i = 1$ のとき，$G_1 = D[V_1] - S_1$ は頂点 1 のみからなるグラフであり，$\deg_{G_1}(1) = 0$ かつ $next[1] = \infty$ である．

$k \geq 2$ とし，$i = k - 1$ に対して補題が成立すると仮定し，$i = k$ に対して補題が成立することを示す．

$k \in S_k$ であるとき，$G_k = G_{k-1}$ であるので，帰納法の仮定より $i = k$ に対して補題は成立する．

$k \notin S_k$ であると仮定する．このとき，$S[k] = False$ であるので，Algorithm 1 の動作より，任意の $u \in N_D^-(k)$ に対して $S[u] = True$ もしくは $next[u] = \infty$ のどちらかが成立する．したがって，$S[u] = False$ すなわち $u \notin S$ であり，かつ，$next[u] = \infty$ すなわち $\deg_{G_{k-1}}(u) = 0$ である頂点 $u \in N_D^-(k)$ のみが $next[u] = k$ となるので，G_k について補題の 3 つの条件が成立する．

以上のことから，補題が成立する．□

系 1　$D - S$ は単一連結である．

証明: $D - S = G_n$ であることに注意されたい．ある $u, v \in V(G_n)$ に対して G_n 上に異なる 2 本の (u, v)-パスが存在すると仮定する：2 本のパスの長さの総和が最も小さいと仮定して一般性を失わない．このとき，2 本のパス上の u の次の点 x, y は異なるが，これは $x, y \in N_{G_n}^+(u)$ を意味し，$\deg_{G_n}(u) \geq 2$ となるので補題 1 に反する．よって，$G_n = D - S$ 上に (u, v)-パスは高々 1 本しか存在せず，$D - S$ は単一連結である．□

定理 3　S は最小単一連結除去集合問題に対する最適解である．

証明: 系 1 より S は単一連結除去集合であるので，最適性のみを示せば十分である．

S が最適解でないと仮定すると，最適解 T が存在する：任意の $i \in V(D)$ に対して $T_i = T \cap V_i$ とし，$G'_i = D[V_i] - T_i$ とおいたとき，$G_k \neq G'_k$ となる最小の k が最大となる最適解 T を仮定する．$k \in S$ である場合，Algorithm 1 の動作より，ある $i < j < k$ に対して $i, j \notin S_{k-1} = T_{k-1}$ かつ $(i, j), (i, k) \in A(D)$ が成立しており，D は外トーナメントであるので，(j, k) も成立するので，G'_k すなわち $D - T$ は異なる 2 本の (i, k)-パスを持つことになり，T が最適解 (単一連結除去集合) であることに反する．よって，$k \notin S$ かつ $k \in T$ である．$k \notin S$ であるので，任意の $u \in N_{G_k}(k)$ に対して $(u, v) \in A(G_{k-1})$ である $v \in V(G_{k-1})$ は存在しないことに注意されたい．したがって，$T - \{k\}$ は実行可能解でないので，$D - (T - \{k\})$ においてどちらかの場合が成立する：

(場合 1)　ある $i, j \in V(D - T)$ が存在して，$i < k < j$ かつ $(i, k), (i, j) \in A(D)$ である；

(場合 2)　ある $l_1, l_2 \in V(D - T)$ が存在して，$l_1, l_2 > k$ かつ $(k, l_1), (k, l_2) \in A(D)$ である．

(場合 1) が起こり，(場合 2) が起こらない場合，$T - \{k\} \cup \{j\}$ は単一連結除去集合であり，$|T - \{k\} \cup \{j\}| = |T|$ であるので，$U = T - \{k\} \cup \{j\}$ は最適解であるが，$U_k = U \cap V_k$ とおくと，$U_k = S_k$ であるので T の仮定に反する．

(場合 2) が起こり，(場合 1) が起こらない場合，l_1 と l_2 のどちらかを任意に選び，これを l とすると，$T - \{k\} \cup \{l\}$ は単一連結除去集合であり，$|T - \{k\} \cup \{l\}| = |T|$ であるので，$U = T - \{k\} \cup \{l\}$ は最適解であるが，$U_k = U \cap V_k$ とおくと，$U_k = S_k$ であるので T の仮定に反する．

(場合 1) と (場合 2) が同時に起こると仮定する．D は外トーナメントであるので，(場合 1) より $(k, j) \in A(D)$ である．$j \neq l_1$ かつ $j \neq l_2$ である場合，$j, l_1, l_2 \in N_D^+(k)$ であるので，$D[\{j, l_1, l_2\}]$ がトーナメントとなり，$D - T$ が単一連結であることに反する．したがって，$j = l_1$ もしくは $j = l_2$ である．一般性を失うことなく $j = l_1$ と仮定すると，$l = l_1$ としたときに (場合 2) が起こり，(場合 1) が起こらない場合と同様の議論ができ，矛盾が生じる．

したがって，いずれの場合も矛盾が生じるので，S は最適解である．□

Algorithm 1 の時間計算量は明らかに線形時間であるので，定理 2 が成立する．

参考文献

[1] Avinandan Das, Lawqueen Kanesh, Jayakrishnan Madathil, Komal Muluk, Nidhi Purohit, and Saket Saurabh. On the complexity of singly connected vertex deletion. Theoretical Computer Science, 934:47 – 64, 2022.

[2] Martin Dietzfelbinger and Raed Jaberi. On testing single connectedness in directed graphs and some related problems. Information Processing Letters, 115(9):684 – 688, 2015.