A-031

格子グラフの警官数について
On the cop number of grids

山田 裕也[1)]　　**山田 敏規**[1)]
Yuya Yamada　Tosinori Yamada

1　警官と強盗のゲームについて

近年，ビルなどの建造物や特定の敷地を巡回警備する自律型のロボットが開発されており，不審者を見つけた際にはロボットが不審者を追い込むことが期待されている．このとき，経済的な観点から不審者を捕まえるために必要なロボットの台数の最小化することは重要である．この問題は警官と強盗のゲームとして定式化することができる．

G をグラフとし，$V(G)$ と $E(G)$ をグラフとする．2 つの頂点 $u, v \in V(G)$ を結ぶ辺は $\{u, v\} \in E(G)$ で表すとする．任意の頂点 v に対して，v の隣接点集合を $N_G(v) = \{u : \{u, v\} \in E(G)\} \cup \{v\}$ と定義する．

警官と強盗のゲームは Aigner ら [1] によって以下のように定義される．最初，1 人の強盗と k 人の警官 (k は $|V(G)| - 1$ 以下の正の整数) がグラフ G 上の異なる点に置かれる．次に，頂点 v_r にいる強盗は $N(v_r)$ のいずれかの頂点へ移動し，頂点 v_{ci} にいる警官は $N(v_{ci})$ のいずれかの頂点へ移動する ($i = 1, 2, ..., k$)．ここで，複数の警官が同じ頂点にいてもよいものとする．この移動を繰り返すことで，警官のいずれかが強盗を捕まえることができれば警官の勝ち，どの警官も強盗を永遠に捕まえることができないならば強盗の勝ちとする．このとき，強盗と警官の任意の初期配置に対して警官が勝つ最小の k を G の警官数 (cop number) と呼び，$c(G)$ で表す．この $c(G)$ について，$c(G) = 1$ におけるグラフ G の特徴づけは Aigner ら [1] によって研究され，同じく Aigner ら [1] によって平面的グラフ G において $c(G) \le 3$ であることが証明された．また Meyniel [2] は頂点数 $|V(G)|$ のグラフ G に対し，$c(G)$ は最大でも $O(\sqrt{V(G)|})$ であると予想した．これに対し Frankl [2] は $c(G) = o(|V(G)|)$ を証明した．この予想はいまだ未解決であるが，今知られている上界は Lu ら [3] による $O(n2^{-(1-o(1))\sqrt{\log_2 n}})$ である．また，Wagner [4] は直径が最大 2 のグラフ G、または直径が最大 3 の二部グラフ G において $c(G) \le 2\sqrt{n}$ を証明した．

2　d 次元格子グラフの警官数の上界

任意の正の整数 n に対して，$[n] = \{1, 2, ..., n\}$ と定義する．d 次元格子グラフ $G_d(m_1, m_2, ..., m_d)$(略して G_d) は以下のように定義される：

- $V(G_d) = [m_1] \times [m_2] \times \cdots \times [m_d]$;
- $E(G_d) = \{\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} : \mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V(G_d)\}$.

ここで，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_d)$ であり，$\mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{d} |x_i - y_i|$ である．このとき，$|x_i - y_i| = 1, x_j = y_j (j \ne i)$ である辺 $\{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\} \in E(G_d)$ を i 次元の辺と呼ぶ．以下では，特に断らない限り $m_1, m_2, ..., m_d$ は 2 以上の整数とする．例えば，図 1 は 2 次元格子グラフ $G_2(5, 6)$ である．

1)　埼玉大学 大学院理工学研究科. Graduate School of Science and Technology, Saitama University

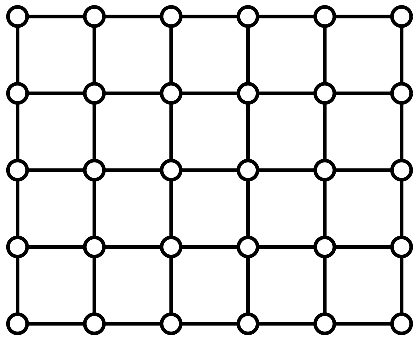

図 1　2 次元格子グラフ $G_2(5, 6)$

この節では，次の定理を証明する．

定理 1　任意の正の整数 d に対して $c(G_d) \le d$ である．

証明: まず，1 人の警官の動きを定義する．(動いた後の) 強盗のいる頂点を $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_d)$，警官がいる頂点を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ としたとき，警官の移動を次のように定義する (最初に当てはまる条件を適用する)：

- $x_d < y_d$ であるならば $x_d \leftarrow x_d + 1$
  $x_d > y_d$ であるならば $x_d \leftarrow x_d - 1$;
- $x_{d-1} < y_{d-1}$ であるならば $x_{d-1} \leftarrow x_{d-1} + 1$
  $x_{d-1} > y_{d-1}$ であるならば $x_{d-1} \leftarrow x_{d-1} - 1$

  $\vdots$
- $x_1 < y_1$ であるならば $x_1 \leftarrow x_1 + 1$
  $x_1 > y_1$ であるならば $x_1 \leftarrow x_1 - 1$;

(警官もしくは強盗が) i 次元の辺で結ばれている隣接点へ移動することを i 次元の移動と呼ぶ：同じ点にとどまることを 0 次元の移動と呼ぶことにする．このとき，次の補題が成立する．

補題 1　警官に捕まえられるまでに強盗は高々 M 回しか 0 次元もしくは 1 次元の移動を行うことができない．ここで，$M = \sum_{i=1}^{d}(m_i - 1)$ である．

証明: 証明: 強盗が移動する前の強盗がいる頂点を $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, ..., y_d)$，警官がいる頂点を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_d)$ とする．$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ であるならばすでに警官が強盗を捕まえているので，$\boldsymbol{x} \ne \boldsymbol{y}$ と仮定する．k を次の 2 つの条件を満たす正の整数とする ($k \le d$)：$x_k \ne y_k$; 任意の整数 $i \ge k + 1$ に対して $x_i = y_i$ である．一般性を失うことなく $y_k < x_k$ であると仮定する．ここから，強盗と警官が移動を繰り返して，任意の整数 $i \ge k$ に対して $x''_i = y''_i$ である頂点 $\boldsymbol{y}'' = (y''_1, y''_2, ..., y''_d), \boldsymbol{x}'' = (x''_1, x''_2, ..., x''_d)$ へそれぞれ到達したときの，強盗が 0 次元もしくは 1 次元の移動を行った回数が高々 $m_k - 1$ であることを示す：これで補題が証明される．

強盗が j 次元の移動を行ったと仮定する．すなわち，移動した後の強盗がいる頂点を $\boldsymbol{y}' = (y'_1, y'_2, ..., y'_d)$ とすると，任意の $i \neq j$ に対して $y'_i = y_i$ かつ $y'_j = y_j \pm 1$ である．次の 2 つの場合が存在する：(1)$0 \leq j \leq k$, (2)$k < j \leq d$. 移動した後の警官がいる頂点を $\boldsymbol{x}' = (x'_1, x'_2, ..., x'_d)$ とする．

場合 (1)　$0 \leq j \leq k$ であると仮定する．$y'_k < x_k$ であると仮定すると，定義より警官は k 次元の移動して $x'_k = x_k - 1$ となり，任意の整数 $i \geq k+1$ に対して $x'_i = y'_i$ かつ $y'_k \in [1, x'_k] = [1, x_k - 1]$ が成立する．

場合 (2)　$k < j \leq d$ であると仮定する．このとき，定義より警官も j 次元の移動を行うことで $x'_j = y'_j$ となる．したがって，任意の整数 $i \geq k+1$ に対して $x'_i = y'_i$ かつ $y'_k \in [1, x'_k] = [1, x_k]$ が成立する．

したがって，場合 (1) と (2) より，強盗と警官がそれぞれ頂点 $\boldsymbol{y}''$ と $\boldsymbol{x}''$ に到達するまでに場合 (1) を高々 $x_k - 1 \leq m_k - 1$ 回しか行うことができないので，0 次元もしくは 1 次元の移動も高々 $m_k - 1$ 回しか行うことができない． □

では，定理 1 を証明する．

先程定義した 1 人の警官の動きを d 個の条件を (循環的に) シフトすることで d 人の警官の動きとして定義する．補題 1 より，強盗がどの警官にも捕まえられずにいるためには，任意の正の整数 $i \leq d$ に対して強盗の 0 次元もしくは i 次元の移動は高々 $M - 1$ 回でなければならず，合計で高々 $d(M - 1)$ 回の移動に制限される．したがって，有限回の移動で必ず警官のいずれかが強盗を捕まえることができる． □

3　2 次元格子グラフの警官数の下界

本章では 2 次元格子グラフの警官数の下界が少なくとも 2 であることを証明する．

定理 2　$c(R_2) \geq 2$ である．

証明: 警官が 1 人であると仮定する．警官がいる頂点を $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, 強盗のがいる頂点を $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)$ とし，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ であるとする．強盗が動いた後の強盗のいる頂点を $\boldsymbol{y}' = (y'_1, y'_2)$ とする．$\mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 2$ であるとき，$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{y}$ とする：すなわち，強盗は動かないとする．

$\mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 1$ であるとする．$|x_1 - y_1| = 1$ かつ $x_2 = y_2$ であるとき，$x_2 = 1$ であるならば $\boldsymbol{y}' = (y_1, 1)$, $x_2 > 1$ であるならば $\boldsymbol{y}' = (y_1, y_2 - 1)$ とする．このとき，$\mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}'1) = |x_1 - y_1| + 1 = 2$ である．$x_1 = y_1$ かつ $|x_2 - y_2| = 1$ であるとき，$x_1 = 1$ であるならば $\boldsymbol{y}' = (1, y_2)$, $x_1 > 1$ であるならば $\boldsymbol{y}' = (y_1 - 1, y_2)$ とする．このとき，$\mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}') = 1 + |x_2 - y_2| = 2$ である．

いずれの場合も $\mathrm{dist}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}') \geq 2$ であるため，警官が動いても強盗を捕まえることができない．したがって，$c(R_2) \geq 2$ である． □

4　一部の例外

定理 1，定理 2 より，一般に $d \geq 3$ に対して $c(G_d) \geq d$ が成立することが予想されるが，以下の定理から一部例外が存在し，一般には $c(G_d) \geq d$ が成立しないことが分かる．

定理 3　$c(G_3(2, 2, 2)) = 2.$

証明: 任意の $v \in V(G_3(2, 2, 2)) - \{(1, 1, 1), (2, 2, 2)\}$ に対して，v は $G_3(2, 2, 2)$ 上で $(1, 1, 1)$ もしくは $(2, 2, 2)$ のどちらかに隣接しているので，2 人の警官を頂点 $(1, 1, 1)$ と $(2, 2, 2)$ にそれぞれ移動させれば，強盗がどの頂点にいたとしても警官が強盗を捕まえることができる． □

したがって，$d \geq 3$ に対して d 次元格子グラフの警官数を求めることは今後の課題である．

参考文献

[1] M. Aigner and M. Fromme. A game of cops and robbers. Discrete Applied Mathematics, 8(1):1 – 11, 1984.

[2] P. Frankl. Cops and robbers in graphs with large girth and cayley graphs. Discrete Applied Mathematics, 17(1):301 – 305, 1987.

[3] L. Lu and X. Peng. On meyniel's conjecture of the cop number. Journal of Graph Theory, 71(2):192 – 205, 2011.

[4] L. Lu and X. Peng. On meyniel's conjecture of the cop number. Discrete Mathematics, 338(3):107 – 109, 2015.