A-030

多目的最短経路問題に対するFPTAS
FPTAS for multiobjective shortest path problem

中嶋 雄大[1)] Yudai Nakashima
山田 敏規[2)] Toshinori Yamada

1. はじめに

複数の目的関数を持つ最適化問題は多目的最適化問題と呼ばれ，一般にすべての目的関数を最小（もしくは最大）とする実行可能解は存在しないため，パレート最適であるすべての実行可能解を列挙する問題として定式化されている．しかしながら，実際にはすべてのパレート最適な実行可能解が必要ではなく，その中から何かしらの尺度によって一つの「最適解」が選び出される．そこで，この尺度関数を f として，f の値を最小（もしくは最大）とする実行可能解を求める問題として多目的最適化問題を（通常の）最適化問題に定式化しなおす．

小文では，多目的最短経路問題に対してこの考え方を適用し，f が最大値関数であるときに FPTAS が存在することを示す．

2. 多目的最短経路問題とその再定式化

2.1. 最短経路問題

G を有向グラフとし，$V(G)$ と $A(G)$ をそれぞれ G の点集合と（有向）辺集合とする．G 上の u から v への辺を (u,v) で表す．2つの異なる頂点 $s,t \in V(G)$ に対して，次の 3 つの条件を満たす点列 $p=(v_0,v_1,...,v_k)$ を G 上の (s,t)-パスと呼ぶ：

- $v_0=s, v_k=t$
- 任意の非負整数 $i<k$ に対して $(v_i,v_{i+1}) \in A(D)$
- $v_0,v_1,...,v_k$ はすべて異なる

このとき，p を G の部分グラフと見なし，$V(p)=\{v_0,v_1,...,v_k\}$，$A(p)=\{(v_i,v_{i+1}): i=0,1,...,k-1\}$ と定義する．$P_{s,t}$ を G 上の (s,t)-パスの集合とする．

G を有向グラフとし，$c: A(G) \to \mathbb{N}_+$ とする．ここで，$\mathbb{N}_+$ は非負整数の集合とする．任意の $p \in P_{s,t}$ に対して $c(p)=\sum_{e \in A(p)} c(e)$ と定義する．このとき，最短経路問題は次のように定式化される：有向グラフ G，辺のコスト $c: A(G) \to \mathbb{N}_+$，始点と終点 $s,t \in V(G)$ が与えられたとき，$c(p)$ が最小となる $p \in P_{s,t}$ を求めよ．最短経路問題はダイクストラ法を用いて $\mathcal{O}(n^2)$ 時間で解くことができる．ここで，$n=|V(G)|$ である．

2.2. 多目的最短経路問題

最短経路問題は，任意の正の整数 d を用いて辺のコストを $\boldsymbol{c}: A(G) \to \mathbb{N}_+^d$ とすることによって，d 種類のコストを持つ問題に拡張することができる：任意の $p \in P_{s,t}$ に対して $\boldsymbol{c}(p)=\sum_{e \in A(p)} \boldsymbol{c}(e)$ と定義する．しかしながら，d 種類のコストをすべて最小にする (s,t)-パス $p \in P_{s,t}$ は一般に存在しないので，多目的最短経路問題は次のように定式化される．

$\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,...,u_d), \boldsymbol{v}=(v_1,v_2,...,v_d) \in \mathbb{N}_+^d$ とする．$\boldsymbol{u} \le \boldsymbol{v}$（すなわち，任意の $i \in \{1,...,d\}$ に対して $u_i \le v_i$）であり，ある $j \in \{1,...,d\}$ に対して $u_j < v_j$ であるならば，**$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ を支配する** という．

G を有向グラフとし，$\boldsymbol{c}: A(G) \to \mathbb{N}_+^d$ とする．また，$s,t \in V(G)$ とする．$p \in P_{s,t}$ は，$\boldsymbol{c}(p')$ が $\boldsymbol{c}(p)$ を支配するような $p' \in P_{s,t}$ を持たないとき，$(G,\boldsymbol{c})$ 上の **パレート最適** な (s,t)-パスと呼ばれる．$F_{s,t} \subseteq P_{s,t}$ を次の条件を満たす $(G,\boldsymbol{c})$ 上のパレート最適な (s,t)-パスの集合とする：任意の $p' \in P_{s,t}$ に対して $\boldsymbol{c}(p) \le \boldsymbol{c}(p')$ を満たす $p \in F_{s,t}$ が存在する．このとき，多目的最短経路問題は $F_{s,t}$ を求める問題として定式化される．

2.3. 多目的最短経路問題の再定式化

多目的最短経路問題において，実際にはすべてのパレート最適な (s,t)-パスが必要なわけではなく，何かしらの評価の下である一つの最適な (s,t)-パスが選び出されることになる．以下では，その評価方法を明確にし，パレート最適な (s,t)-パスをすべて出力せず，最も良い (s,t)-パスを1つ出力するように多目的最短経路問題を再定式化する．

$f: \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}$ を d 次元コストから（小さい方が良いと判断される）評価値を返す関数とする．ここで，$\mathbb{R}_+$ は非負実数の集合である．任意の $p,p' \in P_{s,t}$ に対して，$\boldsymbol{c}(p) \le \boldsymbol{c}(p')$ であるならば p が選択されなければならないので，f は増加関数でなければならない．すなわち，任意の $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_+^d$ に対して，$\boldsymbol{u} < \boldsymbol{v}$ であるならば，$f(\boldsymbol{u}) < f(\boldsymbol{v})$ でなければならない．また，f は多項式時間で計算可能であるとする．このとき，多目的最短経路問題は次のように再定式化される．

問題 1：有向グラフ G，G 上の辺コスト $\boldsymbol{c}: A(G) \to \mathbb{R}_+^d$，始点 $s \in V(G)$，終点 $t \in V(G)$，評価関数 $f: \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}_+$ が与えられたとき，$f(\boldsymbol{c}(p))$ が最小となる $p \in P_{s,t}$ を求めよ．

評価関数 f が線形関数もしくは最小値関数であるとき，問題 1 は多項式時間で解くことができる[1]．また，f が最大値関数であるとき，問題 1 はNP-困難であることが示されている[1]．

3. 多目的最短経路問題に対する擬多項式時間アルゴリズム

再定式化される前の多目的最短経路問題に対して擬多項式時間アルゴリズムが知られている．したがって，最定式化された後の多目的最短経路問題についても擬多項式時間アルゴリズムを用いて解くことができる．それを Algorithm 1 に示す．ここで，$\boldsymbol{v} \in \mathbb{N}_+^d$，$u \in V(D)$，$i \in \mathbb{N}_+$

1) 埼玉大学 大学院理工学研究科. Graduate School of Science and Technology, Saitama University
2) 同上. Same as above

の 3組 $l=(\boldsymbol{v},u,i)$ に対して， $l.1, l.2, l.3$ はそれぞれ l の第 $1,2,3$ 成分である $\boldsymbol{v},u,i$ を表すとする．また，$\Gamma^{+}(v)$ は，頂点 v を始点とする辺の集合である．

Algorithm 1 多目的最短経路問題に対する擬多項式時間アルゴリズム

Function $\mathrm{MOSP}(G,\, s,\, t,\, \boldsymbol{c},\, f)$ **do**
  $l \leftarrow \{\}; L \leftarrow \{\}$
  For all $u \in V(G)$ **do**
    $L.u \leftarrow \emptyset$
  $l[0] \leftarrow (\mathbf{0}, s, \mathrm{None})$
  $L.s \leftarrow \{0\}; i \leftarrow 0; k \leftarrow 1$
  While $i < k$ **do**
    $(\boldsymbol{v}, u, j) \leftarrow l[i]$
    For all $a=(u,w) \in \Gamma^{+}(u)$ **do**
      If $l[j'].1 \leq \boldsymbol{v}+\boldsymbol{c}(a)$ である $j' \in L.w$ が存在しない **then**
        $l[k] \leftarrow (\boldsymbol{v}+\boldsymbol{c}(a), w, i)$
        $L.w$ の末尾に k を追加; $k \leftarrow k+1$
    $i \leftarrow i+1$
  $f(l[i].1)$ が最小である $i \in L.t$ を求める
  $p=(t)$
  While $l[i].3 \neq \mathrm{None}$ **do**
    $i \leftarrow l[i].3; p$ の先頭に $l[i].2$ を追加
  return p

補題 1: Algorithm 1 は多目的最短経路問題に対する擬多項式時間アルゴリズムである．

証明: アルゴリズムの正当性の証明は簡単なので省略し，以下ではアルゴリズムの時間計算量についてのみ議論する．

任意の $u \in V(G)$ と任意の $i, i' \in L.u$ に対して $l[i].1 \neq l[i'].1$ であり，$E_{\max}=\max\{f(\boldsymbol{c}(a)) : a \in A(G)\}$ とおくと，$l[i].1 \in \{0,\ldots,(n-1)E_{\max}\}^{d}$ である．したがって，$|L.u| \leq ((n-1)E_{\max}+1)^{d}$ である． $L.w$ に k を追加するために要する時間は $\mathcal{O}(|L.w|)$ であることから，全体の時間計算量は$\mathcal{O}\left(n(nE_{\max})^{2d}\right)$ である． □

4. 多目的最短経路問題に対する FPTAS

任意の $a \in A(D)$ に対して， $\boldsymbol{c}(a)$ の第 i 成分を $c_i(a)$ とおく $(i=1,2,\ldots,d)$ ．また，

$$c(a)=\sum_{i=1}^{d} c_i(a)$$

とおく．このとき，多目的最短経路問題に対する FPTAS を Algorithm 2 に示す.

Algorithm 2 多目的最短経路問題に対するFPTAS

Function $\mathrm{FPTAS\_MOSP}(G,\, s,\, t,\, \boldsymbol{c},\, f,\, \varepsilon)$ **do**
  (G,c) 上の最短 (s,t)-パス p' の長さ $c(p')$をC とおく
  $\boldsymbol{c}(a)$にC を超える成分を持つ $a \in A(G)$をG から削除
  $K \leftarrow \frac{\varepsilon C}{dn}$
  任意の $a \in A(G)$ に対して，

$$\boldsymbol{c}'(a) \leftarrow \left(\left\lfloor \frac{c_1(a)}{K} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{c_d(a)}{K} \right\rfloor, \right)$$

  return $\mathrm{MOSP}(G, s, t, \boldsymbol{c}, f)$

定理 1: Algorithm 2 は多目的最短経路問題に対する FPTAS である．

証明： $\max\{f(\boldsymbol{c}'(a)) : a \in A(G)\} \leq \frac{dn}{\varepsilon}$ であるので，Algorithm 2 の時間計算量は $n, m, \frac{1}{\varepsilon}$ の多項式である．

任意の $i=1,2,\ldots,d$ と $a \in A(G)$ に対して，

$$c'_i(a)=\left\lfloor \frac{c_i(a)}{K} \right\rfloor$$

とおくと，

$$\frac{c_i(a)}{K}-1 < c'_i(a) \leq \frac{c_i(a)}{K}$$

であるので，

$$Kc'_i(a) \leq c_i(a) < Kc'_i(a)+K$$

が成り立つ． p を Algorithm 2 の解， p^{*} を最適解（ $f(\boldsymbol{c}(p^{*}))$ が最小の D 上の (s,t)-パス）とし，$\mathrm{OPT}=f(\boldsymbol{c}(p^{*}))$ とし， j は $f(\boldsymbol{c}(p))=c_j(p)$ を満たすとすると，

$$\begin{aligned}
f(\boldsymbol{c}(p)) &= \sum_{a \in A(p)} c_i(a) \\
&< \sum_{a \in A(p)} \left(Kc'_j(a)+K\right) \\
&< \sum_{a \in A(p)} Kc'_j(a)+Kn \\
&\leq \sum_{a \in A(p^{*})} Kc'_j(a)+Kn \\
&\leq \sum_{a \in A(p^{*})} c_j(a)+Kn = c_i(p^{*})+Kn \\
&\leq f(\boldsymbol{c}(p^{*}))+Kn = \mathrm{OPT}+\frac{\varepsilon C}{d} \\
&\leq (1+\varepsilon)\ \mathrm{OPT}
\end{aligned}$$

を満たす．ここで，

$$\frac{C}{d}=\frac{c(p')}{d} \leq \frac{c(p^{*})}{d} \leq f(\boldsymbol{c}(p^{*})) \leq f(\boldsymbol{c}(p')) \leq c(p')=C$$

であることに注意されたい． □

5. まとめと今後の課題

最定式化された多目的最短経路問題より，実行時間と保証する解の質がトレードオフの関係になる FPTAS アルゴリズムの構築及び証明をした．今後は実装をもとに，具体的なグラフでの計算機実験を行う．

参考文献

[1] 田中大雄, “多目的最短経路問題に対する厳密および近似アルゴリズム,” 2020. (電子情報通信学会ICD/CAS研究会)