A-005

二重単調性の緩和制約を用いた ノンパラメトリック項目反応モデル

竹内 崇貴 † 鮭川 矩義 ‡ 高野 祐一 §
筑波大学 † 法政大学 ‡ 筑波大学 §

1 はじめに

テストの難易度や受験者の能力の分布に左右されない, 公平なテストを実施するための方法論として項目反応理論 (IRT) がある. IRT では, 受験者の能力に対する設問の正答率を統計モデルで表し, グラフ化したものを項目特性曲線 (ICC) と呼ぶ.

IRT は ICC の推定方法の違いにより, ICC の形状を仮定するパラメトリック項目反応理論（PIRT）と緩やかな形状制約のもとで推定されるノンパラメトリック項目反応理論（NIRT）の二つに分類される. NIRT は, PIRT に比べて柔軟な推定になるが, 特に設問に対する受験者の回答結果である項目反応データが少ない場合に不安定な推定になる可能性がある. このような不安定性を軽減するために, 単調等質性や二重単調性といったさまざまな制約が提案されている [1, 2, 3].

先行研究 [4] は, 二重単調性の制約をもつ NIRT モデルを混合整数非線形最適化（MINLO）問題として定式化している. しかし推定の柔軟性を大きく制限する二重単調性モデルは, 特に設問数が多い場合に, ICC の推定精度が低いという課題が挙げられている.

そこで本研究では, 二重単調性の緩和制約に基づくノンパラメトリック項目反応モデルを提案する. またその問題を解くために発見的アルゴリズムを利用する.

Nonparametric item response model with relaxed double monotonicity constraints
† Shuki Takeuchi, University of Tsukuba
‡ Noriyoshi Sukegawa, Hosei University
§ Yuichi Takano, University of Tsukuba

2 二重単調性モデル

先行研究 [4] の二重単調性モデルの定式化を示す. まず受験者の番号を $i \in I$, 設問の番号を $j \in J$, 受験者の潜在能力クラスを $t \in T$ と表現する. この時, テスト結果は正答したか否かを表す 2 値の項目反応データ, $\boldsymbol{U} := (u_{ij})_{(i,j)\in I\times J} \in \{0,1\}^{|I|\times|J|}$ で与えられる. また ICC を表す決定変数を $\boldsymbol{W} := (w_{kt})_{(k,t)\in J\times T}$, 設問の難易度順を表す決定変数を $\boldsymbol{Z} := (z_{jk})_{(j,k)\in J\times J}$, 受験者の潜在能力を表す決定変数を $\boldsymbol{Y} := (y_{it})_{(i,t)\in I\times T}$ とする. ここで二重単調性の制約の下で対数尤度関数を最大化する MINLO 問題を解き, ICC と受験者の潜在能力を推定する.

$$\max_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{Z}} \sum_{(i,j,k,t)\in I\times J\times J\times T} y_{it} z_{jk} (u_{ij}\log(w_{kt}) + (1-u_{ij})\log(1-w_{kt})) \quad (1)$$

$$\text{s.t} \quad w_{kt} \le w_{k,t+1} \quad (k,t)\in J\times T \quad (2)$$

$$w_{kt} \le w_{k+1,t} \quad (k,t)\in J\times T \quad (3)$$

$$0 \le w_{kt} \le 1 \quad (k,t)\in J\times T \quad (4)$$

$$\sum_{k\in K} z_{jk} = 1 \quad j\in J \quad (5)$$

$$\sum_{j\in J} z_{jk} = 1 \quad k\in J \quad (6)$$

$$z_{jk}\in\{0,1\} \quad (j,k)\in J\times J \quad (7)$$

$$\sum_{t\in T} y_{it} = 1 \quad i\in I \quad (8)$$

$$y_{it}\in\{0,1\} \quad (i,t)\in I\times T \quad (9)$$

目的関数 (1) は対数尤度関数を最大化している．制約 (2), (3), (4) は各 ICC に課す制約である．制約 (2) は潜在能力の高い受験者は正答率が高いこと（単調等質性）を表し, 制約 (3) は任意の受験者にとって設問の難易度の順番が入れ替わらないこと（二重単調性）を表している．また制約 (5), (6), (7) は各設問を 1 つの難易度に割り当てる制約であり, 制約 (8), (9) は各受験者を 1 つの潜在能力クラスに割り当てる制約である．

3 提案手法

ICC の形状でクラスタリングを行い, 同一クラスターに属する ICC に限定して二重単調性の制約を課すことを二重単調性の緩和制約として提案する．このような緩和を行うことで, 厳しすぎる制約による推定精度の悪化を軽減することができる．

二重単調性の緩和を行うためのクラスタリングに関する最適化問題の定式化を示す．まずクラスターの番号を $n \in N$ と表す．次にクラスターの ICC を表す決定変数を $\boldsymbol{W} := (w_{nt})_{(n,t)\in N\times T}$, 設問の所属クラスターを表す決定変数を $\boldsymbol{V} := (v_{jn})_{(j,n)\in J\times N}$ とする．ここで単調等質性の制約の下で対数尤度関数を最大化する MINLO 問題を解き, 設問の所属クラスターを推定する．

$$\max_{\boldsymbol{W},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{V}} \sum_{(i,j,n,t)\in I\times J\times N\times T} y_{it}v_{jn}(u_{ij}\log(w_{nt}) + (1-u_{ij})\log(1-w_{nt})) \quad (10)$$

$$\text{s.t.} \quad w_{nt} \le w_{n,t+1} \quad (n,t)\in N\times T \quad (11)$$

$$0 \le w_{nt} \le 1 \quad (n,t)\in N\times T \quad (12)$$

$$\sum_{n\in N} v_{jn} = 1 \quad j \in J \quad (13)$$

$$v_{jn} \in \{0,1\} \quad (j,n)\in J\times N \quad (14)$$

$$\sum_{t\in T} y_{it} = 1 \quad i \in I \quad (15)$$

$$y_{it} \in \{0,1\} \quad (i,t)\in I\times T \quad (16)$$

目的関数 (10) は対数尤度関数を最大化している．制約 (11), (12) は単調等質性の制約である．制約 (13), (14) は各設問を 1 つのクラスターに割り当てる制約であり, 制約 (15), (16) は各受験者を 1 つの潜在能力クラスに割り当てる制約である．

4 提案アルゴリズム

クラスタリングの最適化問題は MINLO 問題であり, 厳密解を求めることは困難である．そこで質の良い解を効率的に求めるための発見的最適化アルゴリズムを利用する．このアルゴリズムには EM アルゴリズムを用いている．

5 数値実験

提案手法の有効性を項目特性曲線と潜在能力クラスの推定精度によって検証する．実験の手順は先行研究 [4] に従っている．実験に使用したデータおよび結果, 発見的アルゴリズムの詳細は当日報告する．

参考文献

[1] Mokken, R. J. (1997). Nonparametric models for dichotomous responses. In Handbook of Modern Item Response Theory (pp. 351–367). Springer, New York, NY.

[2] Sato, T., & Takano, Y. (2019). Smoothness-constrained model for nonparametric item response theory. Information Science and Applied Mathematics, 27, 1–20.

[3] Sijtsma, K. (1998). Methodology review: Nonparametric IRT approaches to the analysis of dichotomous item scores. Applied Psychological Measurement, 22(1), 3–31.

[4] Takano, Y., Tsunoda, S., & Muraki, M. (2015). Mathematical optimization models for nonparametric item response theory. Information Science and Applied Mathematics, 23, 1–18.