

最急降下法による投影データからの情報復元 Image Reconstruction by the Method of Steepest Descent

青柳 智裕 大坪 紘一
Tomohiro Aoyagi Kouichi Ohtsubo

1. はじめに

X 線 CT(Computed Tomography)や PET(Positron Emission Tomography)に代表される医用診断装置における画像再構成問題は、任意の生体内部における形態又は機能の断層像をいかに高精細に視覚化することにある。観測データを g 、未知の物理量を f とすると画像再構成問題は次のような積分方程式として定式化される[1-6]。

$$g(y) = \int_a^b K(x, y) f(x) dx. \quad (1)$$

これは、Fredholm の第一種積分方程式となる。この問題を解く場合、積分作用素を離散化することによって行列の形で表現することになる。有限次元ベクトル空間を考えれば、観測データを N 次元、未知データを M 次元とすると、 $N \times M$ の行列となる。 $N = M$ の正則行列ならば逆行列が存在して、観測データに逆行列をかけることで未知データが復元又は再構成することができる。しかし、一般的には正則行列になることはないので、その解の存在と一意性の保証はない[7,8]。

再構成法は 2 つに分類することができる。積分作用素の逆変換を求める解析的手法と代数的かつ逐次的に解を求める反復法である。解析的手法は、観測データを使って離散化された逆変換作用素を基に直接解を求める。反復法は、観測系における先験情報や統計的な性質を考慮することによって、代数的な反復公式を適用して解を求めることになる。Image Space Reconstruction Algorithm(ISRA)は、反復法の一つであり、非負最小 2 乗推定値に収束し、PET における再構成手法として開発された。重みづけした最小 2 乗目的関数を用いることによって、一般化された公式が導出されてきた。また、Maximum Likelihood Expectation Maximization(ML-EM)との関係とその収束特性も明らかにされてきた[9-13]。

本研究では、再構成問題を離散化することによって、ISRA を適用し再構成画像の画質の評価を行う。反復回数、検出器数、投影角数、Relaxation パラメータ、重み係数を変化させたときの最小 2 乗誤差を求めることで画質の評価を行ってきた。反復回数、検出器数、投影角数を増加することによって誤差が減少することを示した。Relaxation パラメータと重み係数がある範囲で変化させたときの再構成画像に与える影響を調べた。

2. ISRA

観測データをベクトル $\mathbf{g} = \{g_i\}_{i=1}^N$ で表す。求めたい未知データをベクトル $\mathbf{f} = \{f_j\}_{j=1}^M$ とする。これらは、ヒルベルト空間の元と考えることができる。再構成問題は次のような行列表記ができる。

$$\mathbf{g} = A\mathbf{f}. \quad (2)$$

線形作用素 A は、 $N \times M$ の非負実数値行列 $A = \{a_{ij}\}$, $a_{ij} \geq 0$ となる。ここで重みづけ 2 乗目的関数を次のように定義する。

$$\Phi_{obj}(\mathbf{f}^k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(g_i - p_i^k)^2}{w_i}. \quad (3)$$

k 番目の推定値 \mathbf{f}^k からの投影データ \mathbf{p}^k を次のように定義する。

$$p_i^k = \sum_{j=1}^M a_{ij} f_j^k + \alpha_i. \quad (4)$$

α_i はノイズとする。今ここで、目的関数を最小にするような \mathbf{f} を求めることを考える。 \mathbf{f} に関して偏微分をとると次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial f_j^k} \Phi_{obj}(\mathbf{f}^k) = - \sum_{i=1}^N \frac{a_{ij} (g_i - p_i^k)}{w_i}. \quad (5)$$

式(5)の右辺は、重みづけされた推定値データの逆投影データから重みづけされた観測データの逆投影を引いた値となる。

$$\frac{\partial}{\partial f_j^k} \Phi_{obj}(\mathbf{f}^k) = \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{p_i^k}{w_i} - \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{g_i}{w_i}. \quad (6)$$

最急降下法[14,15]を用いて、目的関数を最小化する反復法は次のようになる。

$$\mathbf{f}_j^{k+1} = \mathbf{f}_j^k - \beta_j^k \left(\sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{p_i^k}{w_i} - \sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{g_i}{w_i} \right). \quad (7)$$

スケール係数を次のように選ぶ。

$$\beta_j^k = \frac{f_j^k}{\sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{p_i^k}{w_i}}. \quad (8)$$

式(7)に式(8)を代入すると、反復法は次のようになる。

$$\mathbf{f}_j^{k+1} = \mathbf{f}_j^k \frac{\sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{g_i}{w_i}}{\sum_{i=1}^N a_{ij} \frac{p_i^k}{w_i}}. \quad (9)$$

ここで重みを $w_i = 1$ とすると、ISRA が得られる。

$$\mathbf{f}_j^{k+1} = \mathbf{f}_j^k \times \frac{\sum_{i=1}^N a_{ij} g_i}{\sum_{i=1}^N a_{ij} \langle a^i, \mathbf{f}^k \rangle}. \quad (10)$$

ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は内積を表す。

3. 計算機シミュレーション

観測領域を等間隔に離散化し、最小構成単位をピクセルと考える。ピクセルは左上を 1 とし、ラスタースキャンによって順番に番号を割り当て、右下を M とする。従って、 $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^M$ となる。再構成される物体は、j 番目のピクセル \mathbf{f}_j としその中で一様な値とする。投影データはファンビーム投影系を考え、投影角度 $0 \sim 360^\circ$ を等間隔で離散化し、検出器も離散化する。 0° の View の検出器の左端を 1 とし、順番に番号を割り当て、最後の View の右端を N とする。投影データは、i 番目の線積分値を \mathbf{g}_i とする。従って、 $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^N$ となる。i 番目の線と j 番目のピクセルの共通部分の長さを a_j^i で表す[16]。Fig. 1 に観測系の離散化モデルを示す。

アルゴリズム(ISRA)

Step 1(初期化): $\mathbf{f}^0 \in \mathbb{R}^M \setminus \{0\}$

Step 2: 投影データを逆投影する。

$$\mathbf{h}_j = \sum_{i=1}^N a_{ij} \mathbf{g}_i. \quad (11)$$

Step 3 (Iterative step): \mathbf{f}^k と Relaxation パラメータ γ_j を用いて、 \mathbf{f}^{k+1} を計算する。

$$\mathbf{f}_j^{k+1} = \mathbf{f}_j^k \times \left(\frac{\mathbf{h}_j}{\sum_{i=1}^N a_{ij} \langle \mathbf{a}^i, \mathbf{f}^k \rangle} \right)^{\gamma_j}. \quad (12)$$

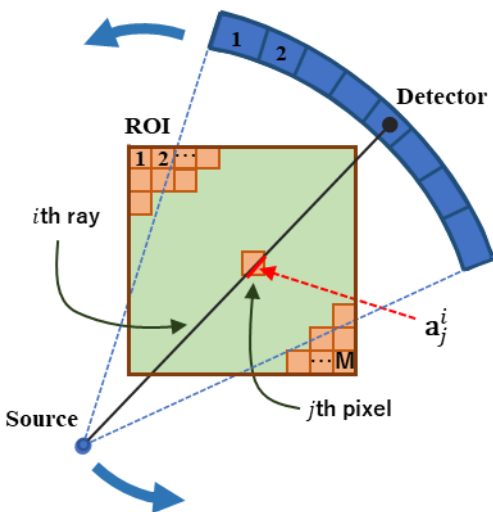


Figure 1: The fully-discretized model of the image reconstruction problem in 2-dimensional space. Fan beam scanning mode (single source, multiple detector, translate-rotate).



Figure 2: The original test image (128x128 pixels, 8bpp).

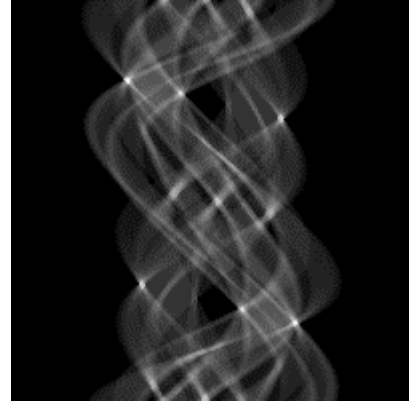


Figure 3: The projection data, Sinogram of the original image in Fig. 2. 200 detectors / view, 200 views / 2π and 8bpp.



Figure 4: The reconstructed image by ISRA after 40 iterations. Initial image is a uniform image of 0.1. Relaxation parameter is the unit.

Fig.2 はテスト画像とし、128x128 ピクセル、256 階調のグレースケール画像とする。Fig.3 は 200 検出器/view、200View/360°で線積分をおこなったときの投影データとなる。ノイズなしの投影データを使ったときに ISRA による再構成画像を Fig.4 に示す。反復回数 40、初期画像は 0.1 の一様分布画像、Relaxation パラメータは 1.0 とする。

Fig.5 は、反復回数に対する平均 2 乗誤差(normalized mean square error: NMSE)の値を示したものである。NMSE は、次のように定義する。

$$\text{NMSE}(k) = \frac{\|\mathbf{f}^k - \mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{f}\|_2}. \quad (13)$$

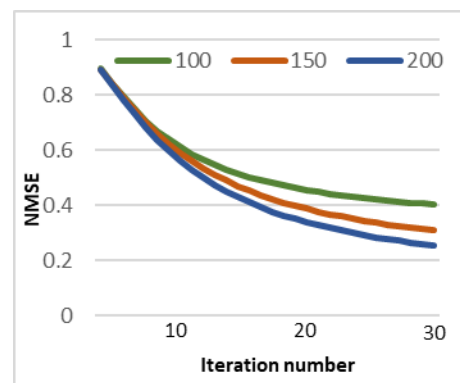


Figure 5: Plots of normalized mean square error versus iteration number. 200 views. Initial image is a uniform image of 0.1. Relaxation parameter is the unit. The number of detectors/view are changed from 100 to 200.

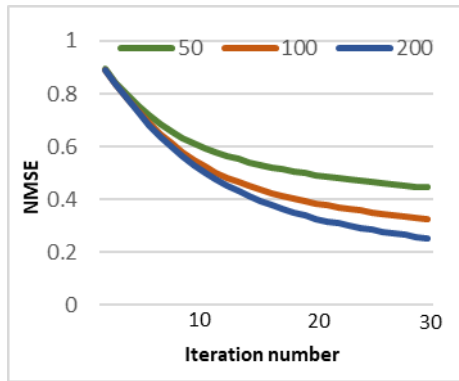


Figure 6: Plots of normalized mean square error versus iteration number. 200 detectors / view. Initial image is a uniform image of 0.1. Relaxation parameter is the unit. The number of views is changed from 50 to 200.

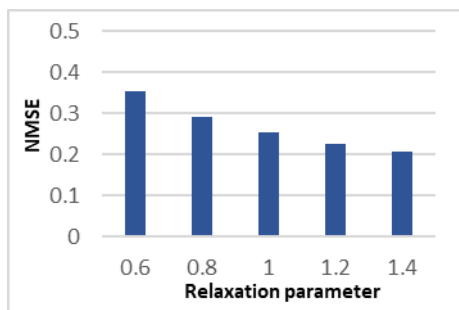


Figure 7: Plots of the normalized mean square error versus relaxation parameter. 200 detectors/view. 200 views/ 2π . Initial data is a uniform image of 0.1. Iteration number is 30.

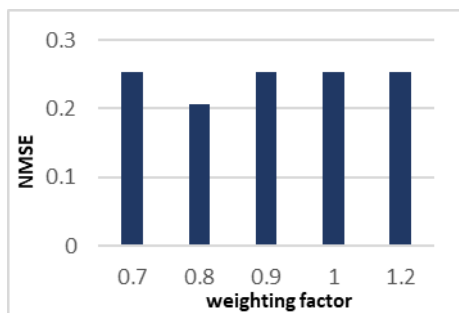


Figure 8: Plots of the normalized mean square error versus the weighting factor. 200 detectors/view. 200 views/ 2π . Initial data is a uniform image of 0.1. Iteration number is 30.

ここで、 \mathbf{f}^k は反復回数 k の画像であり、 \mathbf{f} は元画像である。 $\|\cdot\|_2$ は ℓ^2 -ノルムを表す。検出器の数を 50 から 200 まで変化した。投影角度数は 200 で固定した。初期画像は 0.1 の一様分布画像、Relaxation パラメータは 1.0 とする。反復回数と検出器の数を増やすことで、誤差が小さくなっていくことがわかる。

Fig.6 は、投影角度を 50 から 200 に変化したときの、反復回数に対する平均 2 乗誤差の値を示したものである。初期画像は 0.1 の一様分布画像、Relaxation パラメータは 1.0 とする。反復回数と投影角度の数を増やすことで、誤差が小さくなっていくことがわかる。計算量又は計算時間に関

しては、反復回数、検出器数、投影角の数を増やしていくと増加することになる。

Fig.7 は、Relaxation パラメータを 0.6 から 1.4 に変化したときの、平均 2 乗誤差の値を示したものである。反復回数 30、初期画像は 0.1 の一様分布画像、ノイズなしの投影データを使った。Relaxation パラメータを 0.6 から 1.4 までの範囲で変換させたが、検出器数、投影角度の数、反復回数を固定したとき、徐々に減少することがわかる。

Fig.8 は、式(9)における重み係数 w_i を 0.7 から 1.2 に変化したときの、平均 2 乗誤差の値を示したものである。反復回数 30、初期画像は 0.1 の一様分布画像、ノイズなしの投影データを使った。重み係数を 0.7 から 1.2 の範囲で変化したとき、検出器数、投影角度の数、反復回数を固定したとき、誤差における大きな変化は見られなかった。

4. まとめと今後の課題

画像再構成における観測系を離散化することによって、Fredholm の積分方程式を行列によって表現してきた。ISRA を用いて、投影データから画像を再構成する問題に適用してきた。反復回数、検出器数、投影角数、Relaxation パラメータ、重み係数を変化させたときの最小 2 乗誤差を求めることで画質の評価を行ってきた。反復回数、検出器数、投影角数を増加することによって誤差が減少することを示した。Relaxation パラメータと重み係数を特定の範囲で変化したときの再構成画像に与える影響を調べた。

理想的な解に収束させる、または誤差を減少させるには反復回数、検出器数、投影角数を増加する必要があるが、実際には計算量、計算時間が増加することになるので、観測系やデータに応じた最適なパラメータ設定を行う必要がある。また、パラメータや投影データ数を増やしていくと、解が含まれる集合が変化するので、正則化を行う必要がある。今回、ノイズなしのデータを用いて誤差評価を行ってきたが、ノイズありのデータに対して同様の計算を行い評価する必要がある。ISRA はこれまで PET 画像再構成問題に適用、実装されてきたが、より一般的な線形又は非線形逆問題に適用できるように、解析的かつ代数的な数学的定式化が必要となる。

References

- [1] G. Herman, "Fundamentals of Computerized Tomography," 2nd edition, Springer-Verlag London, (2009).
- [2] A. Kak, M. Slaney, "Principles of computerized tomographic imaging," IEEE Press, New York, (1988).
- [3] A. Imiya, "A direct method of three-dimensional image reconstruction from incomplete projection," Dr. Thesis, Tokyo Institute of Technology, Tokyo. (1985) (Japanese).
- [4] B. Bendriem, D. Townsend, "The theory and practice of 3D PET," Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1998).
- [5] H. Stark, "Image Recovery: theory and application," Academic Press, New York, (1987).
- [6] F. Natterer, F. Wubbeling, "Mathematical Methods in Image Reconstruction," SIAM, Philadelphia, (2001).
- [7] M. Bertero, C. Mol, E. Pike, "Linear inverse problems with discrete data. I: general formulation and singular system analysis," Inverse Problems, 1, 301-330. (1985).
- [8] M. Bertero, C. Mol, E. Pike, "Linear inverse problems with discrete data: II: stability and regularization," Inverse Problems, 4, 573-594. (1988).

- [9] M. Daubewitherspoon, G. Muehlllehner, "An iterative image space reconstruction algorithm suitable for volume ECT," IEEE trans. Med. Imaging, 5(2), 61-66. (1986).
- [10] A. Reader, E. Letourneau, J. Verhaeghe, "Generalization of the image space reconstruction algorithm," IEEE Nucl. Sci. Symp. Conf. Record. 4233-4238. (2011).
- [11] A. Depierro, "On the convergence of the iterative image space reconstruction algorithm for volume ECT," IEEE trans. Med. Imaging, 6(2), 174-175. (1987).
- [12] A. Depierro, "On the relation between the ISRA and the EM algorithm for positron emission tomography," IEEE trans. Med. Imaging, 12(2), 328-333. (1993).
- [13] T. Aoyagi, K. Ohtsubo, "Numerical Analysis for Image Space Reconstruction Algorithm", OPTICS & PHOTONICS International Congress 2023 (The 9th Biomedical Imaging and Sensing Conference) (2023).
- [14] D. Luenberger, "Optimization by vector space methods," John Wiley & Sons. New York, (1969).
- [15] D. Luenberger, "Linear and nonlinear programming," Kluwer Academic Publishers. Boston, 2nd edition, (2003).
- [16] Y. Censor, T. Elfving, G. Herman, T. Nikazad, "On diagonally-relaxed orthogonal projection methods," SIAM J. Sci. Comput. 30, 473-504, (2008).