CA-007

車輪グラフ上の施設配置のためのメカニズムデザイン
Mechanism Design for Facility Location on Wheel Graphs

小副川 貢司* 東藤 大樹* 横尾 真*
Koji Osoegawa Taiki Todo Makoto Yokoo

1 序論

参加者（エージェント）の選好とエージェントが申告する所在地に基づき，施設の配置位置を適切に決定する施設配置問題は，メカニズムデザインの一分野として盛んに研究がなされている [1, 2]．エージェントの選好として，自身の所在地から施設の配置位置までの距離が小さいほど効用が大きいと考える単峰的選好と，自身の所在地から施設の配置位置までの距離が大きいほど効用が大きいと考える単溝的選好がよく知られている．配置される施設が公共財の場合は，エージェントは単峰的選好を持つ．例えば，単峰的選好は，駅やバス停などの近くにあることが好ましい施設に対して我々が持ちうる選好である．一方，配置される施設が公害財の場合は，エージェントは単溝的選好を持つ．例えば，単溝的選好は，原子力発電所や産業廃棄物処理場などの近くにあることが好ましくない施設に対して我々が持ちうる選好である．

メカニズムはエージェントの申告から社会的な結果への写像であり，メカニズムデザインでは，メカニズムが効率性や不正行為に対する頑健性などの望ましい性質を持つことが望まれる．メカニズムデザインの分野において，いずれのエージェントの効用も犠牲にせず，あるエージェントの効用を改善可能な非効率的状況を回避するために，パレート効率性を満たすメカニズムの設計は重要視されている．したがって，本論文では，効率性を表す指標としてパレート効率性を導入する．また，インターネット上などの匿名の環境においてメカニズムを運用する場合，1 人のエージェントが複数のアカウントを用いて，複数人のエージェントであるかのように振る舞う不正行為（架空名義操作）に頑健なメカニズムの設計も重要となる [3, 4]．

* 九州大学大学院システム情報科学府 Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

離散グラフにおいて施設配置メカニズムを扱う既存研究として，Nehama らは ZV-line グラフと呼ばれる新しいグラフクラスを提案することで，エージェントの選好が単峰的選好の場合，任意の木，および限られたサイズの格子グラフでパレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在することを明らかにした [5]．また，Todo らは，エージェントの選好が単峰的選好の場合の任意の閉路グラフ，任意の格子グラフにおけるそのようなメカニズムの存在性を検証し，単溝的選好の場合の任意の木，任意の閉路グラフにおけるそのようなメカニズムの存在性を検証した [6]．また，頂点数が 4, 5 の車輪グラフでは，エージェントの選好が単峰的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在することが知られている [5]．しかしながら，エージェントの選好が単峰的選好と単溝的選好のいずれの場合でも，任意の車輪グラフでパレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムの存在性は考察されていない．

そこで，本論文では，車輪グラフ上でエージェントの選好が単峰的選好である場合と単溝的選好である場合のそれぞれで，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムの存在性を検証する．具体的には，エージェントの選好が単峰的選好の場合，頂点数が 6 以上の任意の車輪グラフでは，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムは存在しないことを証明する．また，エージェントの選好が単溝的選好の場合，車輪グラフの頂点数 k が $4 \leq k \leq 7$ の場合，かつその場合に限りパレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在することを示す．

2 モデル

本章では，本論文で扱う施設配置問題のモデルを示す．本論文では，離散空間に 1 つの施設を配置する問題を扱う．施設を配置可能な点を頂点，頂点同士の接続を辺とする無向重み無しグラフ $G := (V, E)$ を考える．

なお，V は頂点の集合，E は辺の集合を表す．本論文では，特に車輪グラフに焦点を当てる．車輪グラフは，閉路グラフに，そのすべての頂点に接続する頂点を 1 つ加えたグラフである．k 個の頂点を持つ車輪グラフを，W_k と記述する．すなわち，$W_k = (V, E)$ において，

$$\begin{aligned} V &:= \{v_0, v_1, \ldots, v_{k-1}\}, \\ E &:= \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), \ldots, (v_0, v_{k-1}), \\ &\quad (v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_1)\} \end{aligned}$$

である．車輪グラフの頂点数 k は定義より，$k \geq 4$ である．W_4, W_5, W_6 を図 1 に示す．

エージェントの名義の集合を $\mathcal{N}$，参加エージェントの集合を $N \subseteq \mathcal{N}$ とする．参加エージェント $i \in N$ の所在地を $\theta_i \in V$ とし，参加エージェントの所在地の組（プロファイル）を $\theta := (\theta_i)_{i \in N}$ とする．また，$\theta_{-i} := (\theta_{i'})_{i' \neq i}$ をあるエージェント i を除いた残りのエージェントの申告する所在地の組とし，全エージェントが申告する所在地の組を (θ_i, θ_{-i}) と表記する．$I(\theta)$ を少なくとも 1 人のエージェントが位置する頂点の集合とする．すなわち，$I(\theta) := \bigcup_{i \in N} \{\theta_i\} \subseteq V$ である．θ_{-v} をプロファイル θ から頂点 $v \in V$ に位置するエージェントをすべて取り除いて得られるプロファイルとする．定義より，$I(\theta_{-v}) = I(\theta) \setminus \{v\}$ である．

任意の $v, w \in V$ に対して，距離関数 $D : V^2 \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ を，$D(v, w) := \#\{e \in E \mid e \in s(v, w)\}$ とする．ただし，$s(v, w)$ は v と w 間の最短経路を表す．G と $v \in V$ が与えられたとき，$\succsim_v$ を v に位置するエージェントの集合 V の各頂点に対する選好を表す．ただし，$\succ_v$ は $\succsim_v$ における厳密な選好を，$\sim_v$ は同等の選好を表し，二項関係として表現される．選好 $\succsim_v$ が G において単峰的選好であるとは，任意の $w, x \in V$ に対して，$D(v, w) < D(v, x)$ ならばそのときのみ $w \succ_v x$ となり，$D(v, w) = D(v, x)$ ならばそのときのみ $w \sim_v x$ となることを言う．すなわち，v に位置するエージェントは，v に対して x よりも厳密に近い位置にある w を好み，v への距離が等しい頂点に関しては好みに差はない．一方，選好 $\succsim_v$ が G において単溝的選好であるとは，任意の $w, x \in V$ に対して，$D(v, w) > D(v, x)$ ならばそのときのみ $w \succ_v x$ となり，$D(v, w) = D(v, x)$ ならばそのときのみ $w \sim_v x$ となることを言う．すなわち，v に位置するエージェントは，v に対して x よりも厳密に遠い位置にある w を好み，v への距離が等しい頂点に関しては好みに差はない．定義より，各エージェント i の所在地 θ_i に関して，単峰的選好，および単溝的選好は一意に定まる．

本論文では，エージェントが申告する所在地の組 $\theta = (\theta_i)_{i \in N}$ を入力として，施設の配置位置 $v \in V$ を 1 つ出力する施設配置メカニズム f を考える．メカニズム $f : \bigcup_{N \subseteq \mathcal{N}} V^{|N|} \to V$ は，各エージェントの集合 N に対する関数 f_N によって $f = (f_N)_{N \subseteq \mathcal{N}}$ と表現され，各 f_N は $V^{|N|}$ から V への写像として定義される．

施設配置メカニズム f における施設の配置位置は効率的であることが望まれる．本論文では，効率性を表す指標としてパレート効率性を導入する．

定義 1 (パレート効率性)**.** 頂点 $v \in V$ がプロファイル θ において頂点 $w \in V$ をパレート支配するとは，以下の 2 つの条件を同時に満たすことを言う．

- $\forall i \in N, v \succsim_i w.$
- $\exists j \in N, v \succ_j w.$

頂点 $a \in V$ がパレート効率的であるとは，a をパレート支配する頂点が存在しないことを言う．また，メカニズム f がパレート効率性を満たすとは，f が任意の N と任意の θ に対して，パレート効率的な頂点を返すことを言う．$PE(\theta) \subseteq V$ をプロファイル θ におけるパレート効率的な頂点の集合とする．

エージェントは複数の名義を用いて申告を行うことが可能である．エージェント i が使用する名義の集合を $\phi_i \subseteq \mathcal{N} \setminus N$ とする．また，エージェント i が ϕ_i を用いて申告を行う所在地の組を $\theta_{\phi_i} \in V^{|\phi_i|}$ とする．例として，インターネット上でエージェントが所在地を申告する場合，自身の効用を大きくするために複数の名義を用いることによってあたかも複数のエージェントのように振る舞うことが可能である．このような不正行為（架空名義操作）に頑健なメカニズムを設計するためには，1 人のエージェントが複数の名義を用いて所在地を申告しても，そのエージェントが持つ効用を大きくできない性質を満たす必要がある．上述した性質を架空名義操作不可能性と言い，定義を以下に示す．

定義 2 (架空名義操作不可能性)**.** 施設配置メカニズム f が架空名義操作不可能性を満たすとは，以下に示す条件を満たすことを言う．$\forall N, \forall \theta, \forall i \in N, \forall \theta_i, \forall \theta'_i \in V, \forall \phi_i \subseteq \mathcal{N} \setminus N, \forall \theta_{\phi_i} \in V^{|\phi_i|}$ に関して，

$$f(\theta) \succsim_i f(\theta_{-i}, \theta'_i, \theta_{\phi_i}).$$

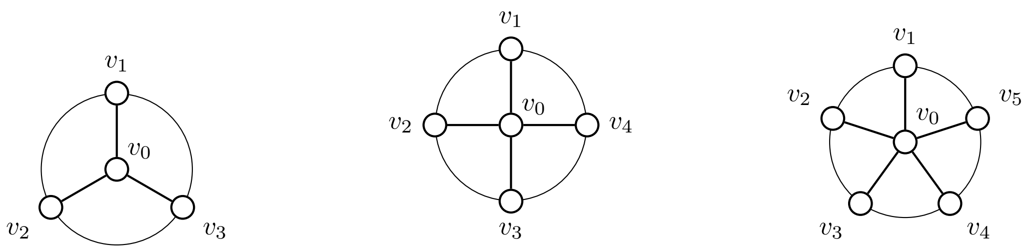

図 1: 車輪グラフ W_4, W_5, W_6

パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムは，各頂点にエージェントが存在するか否かを考慮するメカニズムに限定できる [7]．まず，準備として，重複投票の無視を定義する．

定義 3 (重複投票の無視)**.** 施設配置メカニズム f が重複投票を無視するとは，$I(\theta) = I(\theta')$ となる任意の組 θ, θ' に関して，$f(\theta) = f(\theta')$ となることを言う．

定理 1. パレート効率性および架空名義操作不可能性を同時に満たすが，重複投票を無視しないメカニズム f が存在すると仮定する．このとき，エージェントが単峰的選好であるか単溝的選好であるかに関わらず，架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たす重複投票を無視するメカニズム f' も存在し，$\forall\theta, \forall i \in N$ に対して，以下の式が成り立つ [7].

$$f'(\theta) \sim_i f(\theta)$$

したがって，重複投票を無視する架空名義操作不可能性とパレート効率性を同時に満たす施設配置メカニズムに議論を制限しても一般性を失わない．

3　車輪グラフ上の公益財配置

本章では，車輪グラフ W_k において，すべてのエージェントの選好が単峰的選好であるときの，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズムの存在性を議論する．

定理 2. W_4 を頂点数 4 の車輪グラフとする．W_4 において，単峰的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在する．

証明. Nehama らにより，任意の完全グラフ上において，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在することが示されている [5]．W_4 は完全グラフであるため，明らかに定理が満たされる．□

定理 3. W_5 を頂点数 5 の車輪グラフとする．W_5 において，単峰的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在する．

証明. Nehama らにより，W_5 において，以下のメカニズム f がパレート効率性と架空名義操作不可能性を満足することが示されている [5]．したがって，定理が満たされる．

$$f(\theta) = \begin{cases} v_1 & \text{if } v_1 \in PE(\theta) \\ v_0 & \text{else if } v_0 \in PE(\theta) \\ v_3 & \text{else if } v_3 \in PE(\theta) \\ v_2 & \text{else if } v_2 \in PE(\theta) \\ v_4 & \text{else if } v_4 \in PE(\theta) \end{cases}$$

□

一方，頂点数が 6 以上の任意の車輪グラフ上では，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満たすメカニズムは存在しないことを証明した．証明のために，Todo らによる補題 [6] を示す．

補題 1. G を任意の離散グラフとする．G におけるエージェントの選好が単峰的選好であると仮定する．このとき，任意のパレート効率性と架空名義操作不可能性を満たすメカニズム f において，任意の θ と任意の $v \in I(\theta)$ に対して，以下の式が満たされる [6].

$$[f(\theta) \in I(\theta) \wedge f(\theta) \in I(\theta_{-v})] \Rightarrow [f(\theta_{-v}) = f(\theta)]$$

補題 2. W_k を k 個の頂点を持つ車輪グラフとする．W_k において，エージェントの選好が単峰的選好のとき，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズム f が存在すると仮定する．このとき，$I(\theta) = V$ となる任意の θ に対して，$f(\theta) \neq v_0$ となる必要がある．

証明. 任意のパレート効率性と架空名義操作不可能性を

満足するメカニズム f において，$I(\theta) = V$ となる任意のプロファイル θ に対して，$f(\theta) = v_0$ であると仮定する．また，グラフの対称性より，一般性を失わずに $I(\theta') = \{v_1, v_2\}$ となる任意のプロファイル θ' に対して $f(\theta') = v_1$ とできる．

このとき，$I(\theta'') = \{v_1, v_2, v_3\}$ となるプロファイル θ'' を考えると，$f(\theta'') = v_2$ ならば，θ' において v_2 のエージェントが v_3 に架空名義を追加して施設を近づけることができ，架空名義操作不可能性に反する．また，$f(\theta'') = v_1$ ならば，v_3 に位置するエージェントが架空名義 $\{v_0, v_4, \ldots, v_{k-1}\}$ を追加することで，施設を v_0 に移動させせられる．同様の議論が $f(\theta'') = v_3$ の場合も可能である．したがって，矛盾となり，$f(\theta) \neq v_0$ が導かれる． □

定理 4. W_k $(k \geq 6)$ を頂点数 k の車輪グラフとする．W_k において，単峰的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムは存在しない．

証明. W_k において，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズム f が存在すると仮定する．補題 2 より，$I(\theta) = V$ を満たす任意のプロファイル θ に対して，一般性を失うことなく $f(\theta) = v_1$ とできる（図 2 左上）．

$I(\theta') = V \setminus \{v_0, v_1\}$ を満たす任意のプロファイル θ' を考える（図 2 中段左）．メカニズムがパレート効率性と架空名義操作不可能性を満たすためには，$f(\theta') = v_0$ となる必要がある．このとき，$\mathrm{PE}(\theta') = V \setminus \{v_1\}$ である．$f(\theta') \in \{v_2, \ldots, v_{k-3}\}$ の場合，v_{k-1} に位置するエージェントが v_0 と v_1 に架空名義を追加することで，施設を v_1 に移動させ，距離を 2 から 1 に減少させることが出来る．また，$f(\theta') \in \{v_{k-2}, v_{k-1}\}$ の場合，v_2 に位置するエージェントが架空名義操作を行うインセンティブを持つ．したがって，$f(\theta') = v_0$ となる．

ここで，$3 \leq j \leq k-2$ であるような任意の $j \in \mathbb{N}$ に対して，$\hat{\theta} = \{v_{j-1}, v_j, v_{j+1}\}$ としたとき，$f(\hat{\theta}) = v_j$ となる必要があることを示す．すなわち，車輪グラフ w_k の外周において隣接する 3 つの頂点にエージェントが存在するような任意のプロファイルに対して，その中央の頂点に施設を配置しなければならないというものである．$f(\hat{\theta}) \neq v_j$ のとき，$\hat{\theta}$ において少なくとも 1 人のエージェントは施設への距離が 2 である．このとき，施

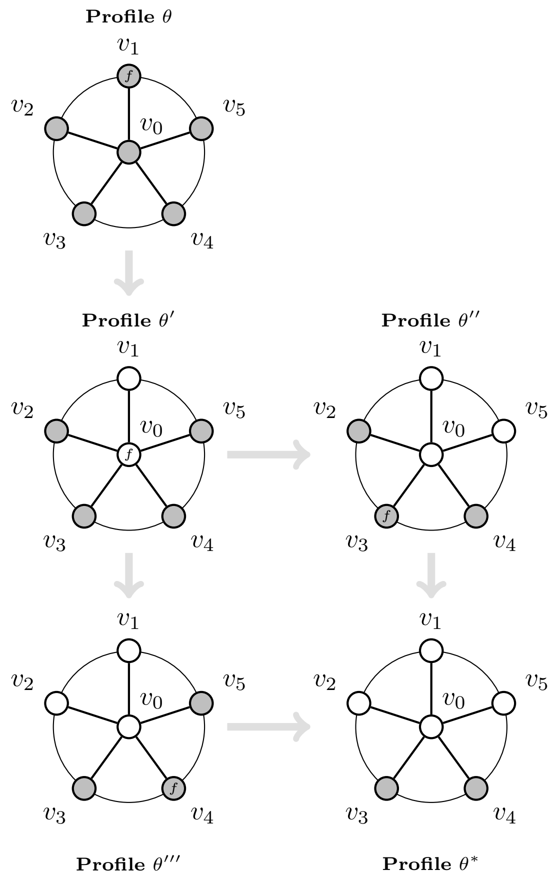

図 2: $k = 6$ の場合の，定理 4 で用いる 5 つのプロファイルを示す．灰色の頂点には少なくとも 1 人のエージェントが存在し，f でラベル付けされている頂点は，そのプロファイルにおいて施設が配置されるべき頂点である．証明はプロファイル θ^* における矛盾を導く．

設への距離が 2 であるエージェントは $\hat{\theta}$ から θ' となるように架空名義を追加するインセンティブを持つ．

上記の議論より，$I(\theta'') = \{v_2, v_3, v_4\}$ となる任意のプロファイルに対して $f(\theta'') = v_3$（図 2 中段右），$I(\theta''') = \{v_3, v_4, v_5\}$ となる任意のプロファイルに対して $f(\theta''') = v_4$ が成り立つ（図 2 左下）．補題 1 より，$I(\theta^*) = \{v_3, v_4\}$ となる任意のプロファイル θ^* に対して，$f(\theta^*) = v_3$ かつ $f(\theta^*) = v_4$ となり（図 2 右下），矛盾が導かれる． □

4 車輪グラフ上の公害財配置

本章では，車輪グラフ W_k において，すべてのエージェントの選好が単溝的選好であるときの，パレート効率性と架空名義操作不可能性を同時に満足するメカニズ

$I(\theta)$	$f(\theta)$	$I(\theta)$	$f(\theta)$	$I(\theta)$	$f(\theta)$	$I(\theta)$	$f(\theta)$
$\{v_0\}$	v_1	$\{v_1\}$	v_0	$\{v_2\}$	v_0	$\{v_3\}$	v_0
$\{v_0, v_1\}$	v_2	$\{v_0, v_2\}$	v_1	$\{v_0, v_3\}$	v_1	$\{v_1, v_2\}$	v_0
$\{v_1, v_3\}$	v_0	$\{v_2, v_3\}$	v_0	$\{v_0, v_1, v_2\}$	v_3	$\{v_0, v_1, v_3\}$	v_2
$\{v_0, v_2, v_3\}$	v_1	$\{v_1, v_2, v_3\}$	v_0	$\{v_0, v_1, v_2, v_3\}$	v_0	-	-

表 1: W_4 においてエージェントの選好が単溝的選好のとき，$v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3$ の順番で頂点をパレート効率的か調べるメカニズムの，入力と出力の対応.

ムの存在性を議論する．$4 \le k \le 7$ のとき，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在することを明らかにした．なお，$k = 6, 7$ の場合は，紙幅の都合上メカニズムのみ提示し，証明は省略する．

定理 5. W_4 を頂点数 4 の車輪グラフとする．W_4 において，単溝的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在する．

証明. 以下のメカニズム f を考える．

$$f(\theta) = \begin{cases} v_0 & \text{if } v_0 \in PE(\theta) \\ v_1 & \text{else if } v_1 \in PE(\theta) \\ v_2 & \text{else if } v_2 \in PE(\theta) \\ v_3 & \text{else if } v_3 \in PE(\theta) \end{cases}$$

W_4 は完全グラフであるため，f が頂点を調べる順番は一般性を失わない．すなわち，任意の順番について同様の証明が可能である．

f は明らかにパレート効率性を満たすため，以下では架空名義操作不可能性について議論する．エージェントの選好が単溝的選好であり，かつ W_4 が完全グラフであるため，エージェントの架空名義操作がそのエージェントに利益をもたらす唯一の状況は，$f(\theta) \in I(\theta)$ となるときである．表 1 より，$f(\theta) \in I(\theta)$ となるのは，$I(\theta) = V = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$ となるときで，$f(\theta) = v_0$ である．このとき，v_0 に位置するエージェントの任意の架空名義操作によって生成されうるプロファイル θ' において，$I(\theta') = V$ または $I(\theta') = V \setminus \{v_0\}$ が成り立つ．いずれの場合においても，$f(\theta') = v_0$ となるため，v_0 に位置するエージェントは任意の架空名義操作で施設を遠ざけられない．したがって，任意のエージェントの架空名義操作は，そのエージェントに利益をもたらさない． □

定理 6. W_5 を頂点数 5 の車輪グラフとする．W_5 において，単溝的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在する．

証明. 以下のメカニズム f を考える．

$$f(\theta) = \begin{cases} v_1 & \text{if } v_1 \in PE(\theta) \\ v_3 & \text{else if } v_3 \in PE(\theta) \\ v_2 & \text{else if } v_2 \in PE(\theta) \\ v_4 & \text{else if } v_4 \in PE(\theta) \end{cases}$$

f は明らかにパレート効率性を満たすため，以下では f が架空名義操作不可能性を満たすことを証明する．

f によるプロファイルと施設の配置位置の関係は以下の通りである．

- $f(\theta) = v_1$ if
  - $v_3 \in \theta$,
  - $I(\theta) = \{v_0, v_2, v_4\}$,
  - $I(\theta) = \{v_2, v_4\}$, or
  - $I(\theta) = \{v_0\}$.
- $f(\theta) = v_3$ if
  - $v_1 \in \theta$ and $v_3 \notin \theta$.
- $f(\theta) = v_2$ if
  - $I(\theta) = \{v_0, v_4\}$, or
  - $I(\theta) = \{v_4\}$.
- $f(\theta) = v_4$ if
  - $I(\theta) = \{v_0, v_2\}$, or
  - $I(\theta) = \{v_2\}$.

次に，任意のプロファイルにおいて，エージェントが任意の架空名義操作を行っても施設を遠ざけられないことを証明する．なお，$\theta_i = v_0$ であるエージェント i において，$\max_{v \in V} D(v, \theta_i) = 1$，および任意のプロファイル θ に対して $D(f(\theta), \theta_i) = 1$ が成り立つため，i の架空名義操作を考慮する必要はない．

- $v_3 \in \theta$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_1$ である．v_3 に位置するエージェントにとって，v_1 は最も遠い頂点であるため，架空名義操作を行うインセンティブがない．$V \setminus \{v_3\}$ の任意の頂点に位置するエージェントは，任意の架空名義操作を行っても，v_3 にエージェントが存在することによって，施設配置位置を v_1 以外の頂点に変えることができない．
- $I(\theta) = \{v_0, v_2, v_4\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_1$ である．
  - $\theta_i = v_2$ であるエージェント i は施設配置位置を v_3，もしくは v_2 に変更可能である．しかしながら，i は施設を遠ざけることはできない．
  - $\theta_i = v_4$ であるエージェント i は施設配置位置を v_3，もしくは v_4 に変更可能である．しかしながら，i は施設を遠ざけることはできない．
- $I(\theta) = \{v_2, v_4\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_1$ である．
  - $\theta_i = v_2$ であるエージェント i は施設配置位置を v_3，もしくは v_2 に変更可能である．しかしながら，i は施設を遠ざけることはできない．
  - $\theta_i = v_4$ であるエージェント i は施設配置位置を v_3，もしくは v_4 に変更可能である．しかしながら，i は施設を遠ざけることはできない．
- $I(\theta) = \{v_0\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_1$ である．すべてのエージェントが v_0 に位置しているため，エージェントの架空名義操作を考慮する必要はない．
- $v_1 \in \theta$ かつ $v_3 \notin \theta$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_3$ である．v_1 に位置するエージェントは v_3 が v_1 から最も遠い頂点であるため，架空名義操作を行うインセンティブを持たない．
  - $V \setminus \{v_1, v_3\}$ の任意の頂点に位置するエージェント i は施設配置位置を v_1 に変更可能である．しかしながら，i は施設を遠ざけることはできない．
- $I(\theta) = \{v_0, v_4\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_2$ である．すべてのエージェントにとって，v_2 は最も遠い頂点であるため，架空名義操作を行うインセンティブを持たない．
- $I(\theta) = \{v_4\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_2$ である．すべてのエージェントにとって，v_2 は最も遠い頂点であるため，架空名義操作を行うインセンティブを持たない．
- $I(\theta) = \{v_0, v_2\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_4$ である．すべてのエージェントにとって，v_4 は最も遠い頂点であるため，架空名義操作を行うインセンティブを持たない．
- $I(\theta) = \{v_2\}$ であるような任意のプロファイル θ を考える．このとき，$f(\theta) = v_4$ である．すべてのエージェントにとって，v_4 は最も遠い頂点であるため，架空名義操作を行うインセンティブを持たない．

以上より，任意のプロファイルにおいて，任意のエージェントは架空名義操作を行っても，施設を遠ざけることができない．

□

定理 7. W_6 を頂点数 6 の車輪グラフとする．W_6 において，単溝的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在する．

証明の概略. 以下のメカニズム f を考える．

$$f(\theta) = \begin{cases} v_1 & \text{if } v_1 \in PE(\theta) \\ v_2 & \text{else if } v_2 \in PE(\theta) \\ v_5 & \text{else if } v_5 \in PE(\theta) \\ v_3 & \text{else if } v_3 \in PE(\theta) \\ v_4 & \text{else if } v_4 \in PE(\theta) \end{cases}$$

□

定理 8. W_7 を頂点数 7 の車輪グラフとする．W_7 において，単溝的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在する．

証明の概略. 以下のメカニズム f を考える．

$$f(\theta) = \begin{cases} v_1 & \text{if } v_1 \in PE(\theta) \\ v_2 & \text{else if } v_2 \in PE(\theta) \\ v_6 & \text{else if } v_6 \in PE(\theta) \\ v_3 & \text{else if } v_3 \in PE(\theta) \\ v_5 & \text{else if } v_5 \in PE(\theta) \\ v_4 & \text{else if } v_4 \in PE(\theta) \end{cases}$$

□

一方，頂点数が 8 以上の任意の車輪グラフ上では，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムは存在しないことを証明した．

補題 3. W_k を k 個の頂点を持つ車輪グラフとする．W_k において，エージェントの選好が単溝的選好のとき，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズム f が存在すると仮定する．このとき，$I(\theta) = V$ となる任意の θ に対して，$f(\theta) \neq v_0$ となる必要がある．

証明. θ を $I(\theta) = V$ を満たす任意のプロファイルとし，メカニズム f において，$f(\theta) = v_0$ であると仮定する．θ' を任意の $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ に対して $I(\theta') = V \setminus \{v_0, v_j\}$ となるプロファイルとする．このとき，任意の $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ に対して，$f(\theta') = v_j$ となる必要がある．θ' において，$PE(\theta') = V \setminus \{v_0\}$ となり，ある $v_l \in V \setminus \{v_0, v_1\}$ に対して $f(\theta') = v_l$ ならば，v_l に位置するエージェントが v_0 と v_j に架空名義を追加して，施設を v_0 に移動させるインセンティブを持つ．これは，架空名義操作不可能性に反するため，$f(\theta') = v_j$ となる必要がある．

一方で，θ'' を $I(\theta'') = V \setminus \{v_0, v_1, v_2\}$ を満たすプロファイルとする．このとき，$PE(\theta'') = V \setminus \{v_0\}$ となり，ある $v_i \in V \setminus \{v_0, v_1, v_2\}$ に対して $f(\theta'') = v_i$ である場合，v_i に位置するエージェントが v_0, v_1 および v_2 に架空名義を追加することで施設を v_0 に移動させ，施設を遠ざけることができる．また，$f(\theta'') = v_1$ の場合，θ' に関する議論より，v_{k-1} に位置するエージェントが架空名義を v_1 に追加することで施設を v_2 に移動させることができ，架空名義操作不可能性を満たさない．$f(\theta'') = v_2$ の場合も，対称性から同様の議論が可能である．したがって，矛盾となり，$f(\theta) \neq v_0$ となる．

□

定理 9. W_k $(k \geq 8)$ を頂点数 k の車輪グラフとする．W_k において，単溝的選好の場合，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムは存在しない．

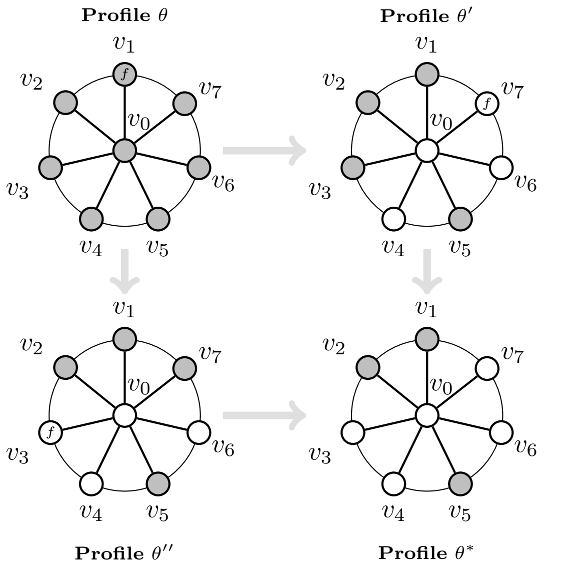

図 3: $k = 8$ の場合の，定理 9 で用いる 4 つのプロファイルを示す．灰色の頂点には少なくとも 1 人のエージェントが存在し，f でラベル付けされている頂点は，そのプロファイルにおいて施設が配置されるべき頂点である．証明はプロファイル θ^* における矛盾を導く．

証明. W_k において，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズム f が存在すると仮定する．補題 3 より，$I(\theta) = V$ を満たす任意のプロファイル θ に対して，一般性を失うことなく $f(\theta) = v_1$ とできる (図 3 左上)．

$I(\theta') = V \setminus \{v_0, v_4, v_{k-2}, v_{k-1}\}$ を満たす任意のプロファイル θ' を考える (図 3 右上)．このとき，$PE(\theta') = \{v_3, \ldots, v_{k-5}, v_{k-2}, v_{k-1}\}$ である．$f(\theta') = v_3$ の場合，v_3 に位置するエージェントは，$v_0, v_4, v_{k-2}, v_{k-1}$ に架空名義を追加することで施設への距離を 1 から 2 に増加させることが出来る．同様に，$f(\theta') = v_{k-2}$ の場合は，v_{k-3} のエージェントが架空名義操作を行うことで施設配置位置を v_1 に変更させることができる．また，$k \geq 9$ のとき，$f(\theta') = v_4$ の場合，v_3，もしくは v_5 に位置するエージェントが同様にして施設を遠ざけることができる．最後に，$k \geq 10$ のとき，$f(\theta') = v_l \in \{v_5, \ldots, v_{k-5}\}$ の場合，v_l に位置するエージェントはすべての頂点にエージェントが存在するかのように架空名義を追加することで施設を v_1 に移動させることができる．したがっ

て，プロファイル θ' において，$f(\theta') = v_{k-1}$ となる必要がある．

ここで，$I(\theta^*) = I(\theta') \setminus \{v_3\}$ となる任意のプロファイル θ^* を考える（図 3 右下）．このとき，$8 \le k \le 11$ ならば，$PE(\theta^*) = \{v_3, v_4, v_{k-2}, v_{k-1}\}$ である．また，$k \ge 12$ ならば，$PE(\theta^*) = \{v_3, v_4, v_7, \ldots, v_{k-5}, v_{k-2}, v_{k-1}\}$ である．$f(\theta^*) \in \{v_4, v_{k-2}\}$ の場合，θ' の場合と同様の議論により，架空名義操作で施設を遠ざけることができるエージェントが存在する．同様に，$k \ge 12$ のとき，$f(\theta^*) \in \{v_7, \ldots, v_{k-5}\}$ の場合，f は架空名義操作不可能性を満たさない．$f(\theta^*) = v_3$ の場合，v_2 に位置するエージェントが v_3 に架空名義を追加することで，施設を v_{k-1} に移動させ，施設への距離を大きくすることができる．したがって，θ^* において，$f(\theta^*) = v_{k-1}$ が成り立つ．

一方で，$I(\theta'') = \{v_1, v_2, v_5, \ldots, v_{k-3}, v_{k-1}\}$ を満たす任意のプロファイル θ'' を考える（図 3 左下）．このとき，$PE(\theta'') = \{v_3, v_4, v_7, \ldots, v_{k-1}\}$ である．θ' の場合と対称的な議論から，f が架空名義操作不可能性を満たすためには $f(\theta'') = v_3$ とならなければならない．ここで，再度 θ^* を考えると，$f(\theta^*) = v_3$ を満たす必要がある．しかしながら，これは $f(\theta^*) = v_{k-1}$ に矛盾する．したがって，メカニズムの存在性に関する仮定が誤りとなる．

□

5　結論

本論文では，車輪グラフ上でエージェントの選好が単峰的選好と単溝的選好である場合のそれぞれにおいて，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムの存在性を検証した．まず，単峰的選好の場合は，頂点数が 6 以上の任意の車輪グラフでは，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムは存在しないことを証明した．次に，単溝的選好の場合は，頂点数が 4 から 7 の車輪グラフでは，パレート効率性と架空名義操作不可能性を満足するメカニズムが存在することを証明し，頂点数が 8 以上の任意の車輪グラフではそのようなメカニズムは存在しないことを示した．

今後の課題としては，他の特徴的なグラフクラスにおいて，エージェントの選好が単峰的選好と単溝的選好の場合に望ましい性質を持つメカニズムの存在性を考察することが挙げられる．

謝辞

本研究は，日本学術振興会科学研究費補助金 JP20H00609 および JP20H00587 の助成を受けたものです．ここに深く感謝いたします．

参考文献

[1] Hervé Moulin. On strategy-proofness and single peakedness. *Public Choice*, Vol. 35, No. 4, pp. 437–455, 1980.

[2] Haris Aziz, Hau Chan, Barton Lee, Bo Li, and Toby Walsh. Facility Location Problem with Capacity Constraints: Algorithmic and Mechanism Design Perspectives. In *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI'20)*, Vol. 34, pp. 1806–1813, 2020.

[3] Makoto Yokoo, Yuko Sakurai, and Shigeo Matsubara. The effect of false-name bids in combinatorial auctions: new fraud in internet auctions. *Games and Economic Behavior*, Vol. 46, No. 1, pp. 174–188, 2004.

[4] Shunsuke Tsuruta, Masaaki Oka, Taiki Todo, Yuko Sakurai, and Makoto Yokoo. Fairness and false-name manipulations in randomized cake cutting. In *Proceedings of the 14th International Conference on Autonomous Agents and Multi-Agent Systems (AAMAS'15)*, pp. 909–917, 2015.

[5] Ilan Nehama, Taiki Todo, and Makoto Yokoo. Manipulation-resistant false-name-proof facility location mechanisms for complex graphs. *Autonomous Agents and Multi-Agent Systems*, Vol. 36, No. 1, 12, 2022.

[6] Taiki Todo, Nodoka Okada, and Makoto Yokoo. False-Name-Proof Facility Location on Discrete Structures. In *Proceedings of the 24th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI'20)*, pp. 227–234, 2020.

[7] Nodoka Okada, Taiki Todo, and Makoto Yokoo. Sat-Based Automated Mechanism Design for False-Name-Proof Facility Location. In *Proceedings of the 22nd International Conference on Principles and Practice of Multi-Agent Systems (PRIMA'19)*, pp. 321–337, 2019.