

制約の付加による完全グラフのオイラー回路の探索の効率化

Improving the Efficiency of Searching for Eulerian Circuits in Complete Graphs by Adding Constraints

神保 秀司†
Shuji JIMBO

1 はじめに

オイラーグラフのオイラー回路 $C = v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_m \rightarrow v_0$ に対して最短部分閉路長 $s(C)$ を次のように定義する.

$$s(C) = \min\{(j-i) \bmod m \mid v_i = v_j\}.$$

オイラーグラフ G に対して, G のオイラー回路 C の最短部分閉路長の最大値

$$e(G) = \max\{s(C) \mid C \text{ is an Eulerian circuit of } G\}$$

を G のオイラー回帰長 (Eulerian recurrence length) と呼ぶ. 著者は, 奇数 n 個の点からなる完全グラフ K_n のオイラー回帰長 $e(K_n)$ の決定に取り組んでいる. 現在, 13 以下の奇数 n については, 計算機を使って $e(K_n)$ の値が決定されている. 一方, 15 以上の奇数 n について著者らは, $n-4 \leq e(K_n) \leq n-3$ という不等式を得, さらに 15 以上のすべての奇数 n について $e(K_n) = n-4$ が成り立つことを予想している [1]. 著者らは, 次の 2 つの予想を証明することにより数学的帰納法で上の予想を証明する方針を立てている.

予想 1. 3 以上の奇数に対して定義された関数 $f(n) = n - e(K_n)$ は, 広義の単調増加関数である.

予想 2. $e(K_{15}) = 11$ が成り立つ.

本論文では, 上の予想 2 の証明のために最短部分閉路長が 12 である K_{15} のオイラー回路の探索を計算機上で実行する場合を考え, 探索空間のサイズを縮小するための制約条件の導入とそれによる探索空間の縮小の効果について考察する. 本論文では, 目的とする探索における探索空間は, 探索の対象となっている全体集合の要素のうち探索中に調べられたものすべてからなる集合とする.

目的とする探索とは, 最短部分閉路長が 12 である K_{15} のオイラー回路の探索であり, 全体集合とは, 初期配置と呼ばれる特定の小道を延長して得られる小道すべてからなる集合である.

2 探索空間のサイズ

以下では, 完全グラフ K_{15} の点集合を $\{0, 1, 2, \dots, 14\} \subseteq \mathbb{Z}$ とする. さらに, K_{15} の点集合と辺集合を, それぞれ, $V(K_{15})$ と $E(K_{15})$ で表す. 完全グラフ K_{15} のオイラー回路 C の長さは, $105 = \binom{15}{2}$ である.

無向グラフの歩道 W について, W 上連続して並んだ m 個の点の中に同じ点が 2 回以上現れないことを $P_m(W)$ で表し, W は条件 P_m を満たすと言う. 条件 P_{12} を満たす任意のオイラー回路 C について, C に点の置換 ρ を施すことにより C が必ず

$$13 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow 9 \rightarrow 10 \rightarrow 11 \rightarrow 0 \rightarrow 12$$

の形の部分小道をもつようにできる. このことは, $e(K_{15}) \leq 12$ から導かれる. 従って, 長さ 14 の上記の小道を目的とする探索における初期配置とすることができ. この初期配置を $I(15)$ で表す.

14 未満の正整数 i について, $I(15)$ における i の出現位置を $p(i)$ で表し, $I(15)$ において出現位置が j である点を $q(j)$ で表す. $I(15)$ の最初の点 13 の出現位置は, $p(13) = 0$ とする. 点集合上の置換 $\varphi: V(K_{15}) \rightarrow V(K_{15})$ を $\varphi(0) = 0$, $\varphi(14) = 14$, 及び $0 < i < 14$ ならば $\varphi(i) = q(14 - p(i))$ により定義する. 初期配置 $I(15)$ を前方に延長して得られる小道 W に写像 φ を施すことにより, $I(15)$ を後方に延長した形の小道, すなわち小道でその最後の長さ 14 の部分小道が初期配置 $I(15)$ になっているものが得られる. 従って, 初期配置 $I(15)$ を前方に延長して得られ, 条件 P_{12} を満たす長さ 59 の小道すべてからなる集合を X とおいたとき, X を単一のハッシュ表に格納できれば X のサイズ (要素数) $|X|$ に比例した計算時間で条件 P_{12} を満たす K_{15} のオイラー回路が存在するか否かを決定することができる. こ

† 岡山大学大学院自然科学研究科客員研究員

Guest Researcher, Graduate School of Natural Science and Technology, Okayama University

のときハッシュ表 H に格納するのは、 X に属する小道 W そのものではなく、 W に含まれる辺すべてからなる集合 $E(W)$ とする。 X の各要素 W について W を長さ 1 延長した小道 W' をすべて求め、 $E(W')$ の補集合 $E(K_{15}) - E(W')$ を H に対して検索する。

乱数を使った計算機実験により $|X|$ の推定値として 2^{55} 程度の値が得られている。さらに、各 $W \in X$ について W を長さ 1 延長した小道 W' の個数の平均の推定値は、1.7 以下である。さらに、 X を得るために探索する部分小道の総数 (探索空間全体のサイズ) の推定値は、 $|X|$ の 2.5 倍以下である。

現在著者が使用できる計算環境における主記憶容量は、数百ギガバイト程度であり、単一のハッシュ表に格納できる要素数は、 2^{35} 程度である。 X を n 個に分割してハッシュ表に格納した場合、使用する計算資源の量が n 倍になってしまう。この問題に対処するために複数の X の要素を代表する要素をハッシュ表に格納する方法を検討している。初期配置 $I(15)$ に含まれない辺をランダムに m 個選び、それらからなる集合を $S = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ とおく。 X の各要素 W について $E(W) - S$ をハッシュ表に格納し、小道 W' について $(E(K_{15}) - E(W')) - S$ を検索する。 X の要素の内この検索を通過した要素すべてからなる集合 X' のサイズが X に比べて十分に小さくなれば、同様の操作を繰り返すことにより使用する計算資源の量を大幅に縮小できる。

3 枝刈り DNF

X の要素 W すべてについてハッシュ表に対して W を検索するには莫大な計算資源を必要とするので、何らかの方法で延長しても条件 P_{12} を満たす K_{15} のオイラー回路が得られない X の要素をなるべく多く省くことが望ましい。そのために枝刈り DNF の導入を提案する。

辺の集合 S で「 $I(15)$ を後方に条件 P_{12} 満たすように延長したとき長さ 59 になるまでに必ず S の要素が現れる」という条件を満たすものが存在する。例えば、 $\{(13, 10), (13, 11), (13, 12), (13, 14)\}$ がそのような S の例である。他に $\{(10, 12), (10, 14), (11, 9), (11, 14), (12, 9), (12, 14)\}$ 等が挙げられる。このような集合 S を危険集合と呼ぶことにする。辺 (i, j) に対して命題変数 $X(i, j)$ で「辺 (i, j) が小道 W に含まれる」という命題を表し、危険集合 $S = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$ に対応する項 $X(i_1, j_1) \wedge X(i_2, j_2) \wedge \dots \wedge X(i_k, j_k)$ を $X(S)$ で表す。危険集合の族 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ に対して DNF $X(S) = X(S_1) \vee X(S_2) \vee \dots \vee X(S_m)$ を枝刈り DNF と

呼ぶ。探索中の小道 W に対して枝刈り DNF が真であれば W を枝刈りしてよい。

さらに、相対的危险集合と相対的枝刈り DNF を次のように定義する。初期配置 $I(15)$ から小道を延長するとき、部分小道 W の終点から初期配置に向かって出現順に点に 0 から始まる相対的な番号を付ける付け方は 8 通り存在する。これらを相対的な出現の型と呼ぶ。命題変数 $Y(i, j)$ で「 W における相対番号 i の点と j の点を結ぶ辺が W に含まれる」という命題を表す。相対的な出現の型 t を初期配置とし条件 P_{12} を満たす長さ 59 の小道に必ず $S = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_k, j_k)\}$ に属する相対番号の対に対応する辺が現れるとき、 S を相対的危险集合と呼び、対応する項 $Y(i_1, j_1) \wedge Y(i_2, j_2) \wedge \dots \wedge Y(i_k, j_k)$ を $Y(S)$ で表す。相対的危险集合の族 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$ に対して DNF $Y(S) = Y(S_1) \vee Y(S_2) \vee \dots \vee Y(S_m)$ を相対的枝刈り DNF と呼ぶ。探索中の小道 W に対して相対的枝刈り DNF が真であれば W を枝刈りしてよい。

4 まとめと今後の課題

完全グラフ K_{15} のオイラー回路の最短部分閉路長についての予想 (第??節における予想 2) を計算機を使った探索により証明する際の探索空間のサイズについて考察し、探索空間のサイズを縮小する方法として枝刈り DNF と相対的枝刈り DNF の導入を提案した。2 種類の DNF による制約の導入による探索空間縮小の効果は、現時点では殆ど得られていない。複雑な枝刈り DNF 及び相対的枝刈り DNF の構築により目的とする探索を完了することが今後の課題である。

謝辞

本研究は主に九州大学情報基盤研究開発センターの研究用計算機システムを利用しました。

参考文献

- [1] Shuji Jimbo and Akira Maruoka. The Upper Bound on the Eulerian Recurrent Lengths of Complete Graphs Obtained by an IP Solver. In *International Workshop on Algorithms and Computation*, pp. 199–208. Springer, 2019.